Семинар 5. Упражнения

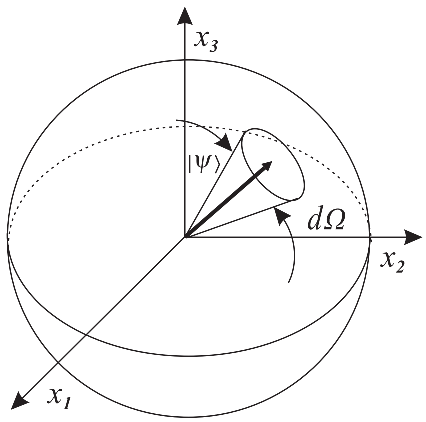

рис.5.1.

Пример 5.1. Кубит (спин-1/2) находится в неизвестном чистом состоянии $|\psi\rangle$, выбранном случайным образом из ансамбля состояний однородно распределенных по сфере Блоха. Выбирая случайным образом, что данное состояние есть $|\varphi\rangle$, чему равна в среднем точность воспроизведения случайного выбора (fidelity) F, определяемая соотношением $F \equiv |\langle\varphi|\psi\rangle|^2$?

Решение:

В силу однородности распределения ансамбля состояний по сфере Блоха, можно утверждать, что вероятность нахождения состояния внутри телесного угла $d\Omega$ на сфере Блоха равна:

$$d\mu = \frac{1}{4\pi}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{1}{4\pi}\, d\Omega. \tag{5.1}$$

Средняя точность воспроизведения случайного выбора определяется усреднением по всем возможным состояниям $|\psi\rangle$ и $|\varphi\rangle$. Если обозначить операцию усреднения по состояниям $|\varphi\rangle$ — $E_{|\varphi\rangle}$, а по состояниям $|\psi\rangle$ — $E_{|\psi\rangle}$, получим

$$\begin{aligned}
\langle F\rangle =& E_{|\psi\rangle}E_{|\varphi\rangle}\left[\,|\langle\varphi|\psi\rangle|^2\,\right]\\
=& E_{|\psi\rangle}E_{|\varphi\rangle}\left[\langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle\right]\\
=& E_{|\psi\rangle}E_{|\varphi\rangle}\left[\,Sp(|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|)\right]\\
=& Sp\,\left(E_{|\psi\rangle}E_{|\varphi\rangle}\left[\,|\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|\,\right]\right)\\
=& Sp\,\left(E_{|\psi\rangle}\left[|\psi\rangle\langle\psi|\right]E_{|\varphi\rangle}\left[|\varphi\rangle\langle\varphi|\right]\right)\\
=& Sp\,\left[\left(\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\hat{\mathbf{n}}_{|\psi\rangle}\cdot\sigma)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right)\left(\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\hat{\mathbf{n}}_{|\varphi\rangle}\cdot\sigma)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\right)\right]\\
=& Sp\,\left[\left(\frac{1}{2}\mathbf{1}\right)\left(\frac{1}{2}\mathbf{1}\right)\right]\\
=& \frac{1}{4}\,Sp\,\mathbf{1}\\
=& \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Таким образом усредненная точность выбора равна $\langle F\rangle = 1/2$.

Пример 5.2. После случайно выбранного однокубитового чистого состояния (см. пример 5.1.) выполняется измерение спина вдоль оси z. Это измерение приготавливает состояние, описываемое матрицей плотности

$$\varrho = P_\uparrow\langle\psi|\,P_\uparrow\,|\psi\rangle + P_\downarrow\langle\psi|\,P_\downarrow\,|\psi\rangle, \tag{5.2}$$

где $P_{\uparrow,\downarrow}$ — проекторы на состояние со спином вверх и вниз по оси z, соответственно. В среднем с какой точностью $F \equiv \langle\psi|\,\varrho\,|\psi\rangle$ этот оператор плотности представляет начальное $|\psi\rangle$ — состояние?

Р е ш е н и е:

До начала вычислений объясним почему оператор плотности, который приготавливается в результате измерения может быть записан в форме, приведенной в условии задачи. Напомним, что если квантовая система находящаяся в чистом состоянии $|\psi\rangle$ подвергается процессу измерения наблюдаемой A, то состояние $|\psi\rangle$ редуцируется в состояние

$$|\psi_n\rangle = \frac{P_n\,|\psi\rangle}{\big\langle\psi\big|\,P_n\,\big|\,\psi\big\rangle^{1/2}}, \tag{5.3}$$

где P_n — проектор на собственное состояние $|A\rangle$. Это предполагает, что оператор плотности для этого чистого состояния должен трансформироваться к ансамблю по всем возможным результатам измерения

$$|\psi\rangle\,\langle\psi| \longrightarrow \sum_n p_n\,|\psi_n\rangle\,\langle\psi_n|\,, \tag{5.4}$$

здесь p_n — вероятность обнаружения состояния $|\psi_n\rangle$ в $|\psi\rangle$. Однако, так как $|\psi_n\rangle\,\langle\psi_n|$ — есть проектор P_n, поэтому оператор плотности, который приготавливается в результате измерения может быть эквивалентно представлен в виде

$$|\psi\rangle\,\langle\psi| \longrightarrow \sum_n \big\langle\psi\big|\,P_n\,\big|\,\psi\big\rangle\,P_n, \tag{5.5}$$

Это выражение справедливо, только если система исходно находилась в чистом состоянии. Выбирая оператор плотности в форме (5.5) вычисление точности воспроизведения определяется выражением

$$\begin{aligned}
F =&\big\langle\psi\big|\,\varrho\,\big|\,\psi\big\rangle\\
=&\big\langle\psi\big|\,(P_\uparrow\big\langle\psi\big|\,P_\uparrow\,\big|\,\psi\big\rangle + P_\downarrow\big\langle\psi\big|\,P_\downarrow\,\big|\,\psi\big\rangle)\,\big|\,\psi\big\rangle\\
=&\big\langle\psi\big|\,P_\uparrow\,\big|\,\psi\big\rangle\big\langle\psi\big|\,P_\uparrow\,\big|\,\psi\big\rangle + \big\langle\psi\big|\,P_\downarrow\,\big|\,\psi\big\rangle\big\langle\psi\big|\,P_\downarrow\,\big|\,\psi\big\rangle\\
=&\big\langle\psi\big|\,P_\uparrow\,\big|\,\psi\big\rangle^2 + \big\langle\psi\big|\,P_\downarrow\,\big|\,\psi\big\rangle^2\\
=&p_\uparrow^2 + p_\downarrow^2\\
=&p^2 + (1-p)^2 \qquad\qquad\qquad\qquad (p \equiv p_\uparrow)\\
=&2p^2 - 2p + 1.
\end{aligned}$$

Чтобы найти среднее значение точности воспроизведения, нужно вычислить классическое ожидаемое значение, усреднив по всем возможным направлениям состояния $|\psi\rangle$. Так как состояния $|\psi\rangle$ однородно распределены в пространстве Блоха $\langle F\rangle = E_{|\psi\rangle}[F]$ может быть найдено путем предположения от однородности распределения вероятности $p \in 0 \div 1$. В результате

$$
\begin{aligned}
\langle F\rangle &= \int\limits_0^1 (2p^2-2p+1)\,dp \\
&= 2\frac{p^3}{3} - 2\frac{p^2}{2} + 1\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{3} - 1 + 1 \\
&= \frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

Пример 5.3. Для двух-кубитового состояния:

$$
|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\rangle_A\left(\frac{1}{2}\,|\uparrow\rangle_B + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|\downarrow\rangle_B\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\rangle_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\uparrow\rangle_B + \frac{1}{2}\,|\downarrow\rangle_B\right)
$$

1. Вычислить $\varrho_A = Sp_B(|\Phi\rangle\langle\Phi|)$ и $\varrho_B = Sp_A(|\Phi\rangle\langle\Phi|)$
2. Найти разложение Шмидта для состояния $|\Phi\rangle$

Решение:

1. Частичные шпуры

Эта часть задачи решается по определению. Начальное состояние системы есть:

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle =& \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\rangle_A\left(\frac{1}{2}\,|\uparrow\rangle_B + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|\downarrow\rangle_B\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\rangle_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\uparrow\rangle_B + \frac{1}{2}\,|\downarrow\rangle_B\right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{8}}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{3}\,|\uparrow\downarrow\rangle + \sqrt{3}\,|\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right).
\end{aligned}
$$

С учетом данного равенства оператор плотности может быть записан в виде:

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle\langle\Phi| =& \frac{1}{8}\left(|\uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{3}\,|\uparrow\downarrow\rangle + \sqrt{3}\,|\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right)\left(|\uparrow\uparrow\rangle + \sqrt{3}\,|\uparrow\downarrow\rangle + \sqrt{3}\,|\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right) \\
=& (|\uparrow\uparrow\rangle\ |\uparrow\downarrow\rangle\ |\downarrow\uparrow\rangle\ |\downarrow\downarrow\rangle)\,\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{3} & 3 & 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 3 & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Частичный шпур по переменным системы B есть:

$$\begin{aligned}
\varrho_A =& Sp_B(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \\
=& \big\langle \uparrow_B \big|\Phi\big\rangle\big\langle\Phi\big| \uparrow_B \big\rangle + \big\langle \downarrow_B \big|\Phi\big\rangle\big\langle\Phi\big| \downarrow_B \big\rangle \\
=& \frac{1}{8}\left[\begin{array}{c} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sqrt{3}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \sqrt{3}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + 3|\downarrow\rangle\langle\downarrow|) + \\ (3|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sqrt{3}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \sqrt{3}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \end{array}\right] \\
=& \frac{1}{8}\Big(4|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + 2\sqrt{3}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + 2\sqrt{3}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + 4|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\Big) \\
=& (|\uparrow\rangle\ |\downarrow\rangle)\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle\uparrow| \\ \langle\downarrow| \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В силу симметрии систем A и B получим для ϱ_B аналогичное выражение:

$$\begin{aligned}
\varrho_B =& Sp_A(|\Phi\rangle\langle\Phi|) \\
=& \big\langle \uparrow_A \big|\Phi\big\rangle\big\langle\Phi\big| \uparrow_A \big\rangle + \big\langle \downarrow_A \big|\Phi\big\rangle\big\langle\Phi\big| \downarrow_A \big\rangle \\
=& \frac{1}{8}\left[\begin{array}{c} (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sqrt{3}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \sqrt{3}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + 3|\downarrow\rangle\langle\downarrow|) + \\ (3|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \sqrt{3}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \sqrt{3}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \end{array}\right] \\
=& \frac{1}{8}\Big(4|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + 2\sqrt{3}|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + 2\sqrt{3}|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + 4|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\Big) \\
=& (|\uparrow\rangle\ |\downarrow\rangle)\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle\uparrow| \\ \langle\downarrow| \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2.Разложение Шмидта.

Эта часть задачи также решается по определению с учетом того, что сначала нужно повернуть базис системы A, чтобы сделать редуцированную матрицу плотности ϱ_A диагональной. Чтобы выполнить это, необходимо найти собственные состояния, которые диагонализуют матрицу ϱ_A:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1/2-\lambda & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\
1/4 - \lambda + \lambda^2 - 3/16 &= 0 \\
\lambda^2 - \lambda + 1/16 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_\pm &= 1/2 \pm \sqrt{3}/4 \\
\big|\psi^\pm\big\rangle_A &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A \pm |\downarrow\rangle_A).
\end{aligned}$$

Чтобы изменить базис, который реализует эти собственные векторы как базисные, воспользуемся обычной формулой замены базиса:

$$|\Phi\rangle = \sum_{i=\pm}\big|\psi^i\big\rangle\big\langle\psi^i\big|\Phi\big\rangle.$$

Коэффициенты разложения в этом выражении являются состояниями системы B, так как скалярное произведение берется только по переменным системы A. Коэффициенты разложения есть:

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi^{+} \middle| \Phi \right\rangle &= \frac{1}{2}\left[\langle\uparrow|_A + \langle\downarrow|_A\right]\left[|\uparrow\rangle_A\left(\frac{1}{2}\,|\uparrow\rangle_B + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|\downarrow\rangle_B\right) + |\downarrow\rangle_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\uparrow\rangle_B + \frac{1}{2}\,|\downarrow\rangle_B\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(|\uparrow\rangle_B + \sqrt{3}\,|\downarrow\rangle_B + \sqrt{3}\,|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B\right) \\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{4}\left(|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B\right) \\
&\equiv |\tilde{\varphi}_1\rangle_B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi^{-} \middle| \Phi \right\rangle &= \frac{1}{2}\left[\langle\uparrow|_A - \langle\downarrow|_A\right]\left[|\uparrow\rangle_A\left(\frac{1}{2}\,|\uparrow\rangle_B + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|\downarrow\rangle_B\right) + |\downarrow\rangle_A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,|\uparrow\rangle_B + \frac{1}{2}\,|\downarrow\rangle_B\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(|\uparrow\rangle_B + \sqrt{3}\,|\downarrow\rangle_B - \sqrt{3}\,|\uparrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_B\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{3}}{4}\left(|\uparrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_B\right) \\
&\equiv |\tilde{\varphi}_2\rangle_B\,.
\end{aligned}$$

Теперь необходимо нормировать полученные состояния в системе B.

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\varphi}_1 \middle| \tilde{\varphi}_1 \right\rangle &= \frac{4+2\sqrt{2}}{16}\left(\langle\uparrow|_B + \langle\downarrow|_B\right)\left(|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B\right) \\
&= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\equiv p_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \tilde{\varphi}_2 \middle| \tilde{\varphi}_2 \right\rangle &= \frac{4-2\sqrt{2}}{16}\left(\langle\uparrow|_B - \langle\downarrow|_B\right)\left(|\uparrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_B\right) \\
&= 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\equiv p_2.
\end{aligned}$$

Используя нормированные состояния $|\varphi_i\rangle_B \equiv \frac{1}{\sqrt{p_i}}\, |\tilde{\varphi}_1\rangle_B$ теперь можно записать разложение Шмидта исходного чистого состояния по ортонормированным состояниям систем A и B.

$$
\begin{aligned}
|\Phi\rangle \; &= \sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A\right)\right]\,\left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}\,\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)\left(|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B\right)\right] \\
&\quad + \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\,\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A - |\downarrow\rangle_A\right)\right]\,\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}\,\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)\left(|\uparrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_B\right)\right] \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A + |\downarrow\rangle_A\right)\right]\,\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_B\right)\right] \\
&\quad + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A - |\downarrow\rangle_A\right)\right]\,\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\rangle_B - |\uparrow\rangle_B\right)\right].
\end{aligned}
$$

Пример 5.4. Рассмотрим оператор плотности для двух кубитов вида

$$
\varrho \;=\; \frac{1}{8}\, I + \frac{1}{2}\, \left|\psi^-\right\rangle\left\langle\psi^-\right|,
$$

где I — единичная 4×4-матрица, а

$$
\left|\psi^-\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle\,|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle\,|\uparrow\rangle\right)
$$

Предположим, что производится измерение первого спина вдоль оси $\vec{n}$, а второго спина вдоль оси $\vec{m}$, где $(\vec{n}\cdot\vec{m}) = \cos\theta$. Какова вероятность того, что оба спина будут находиться в состоянии "спин-вверх" относительно выбранных осей?

Р е ш е н и е:

Как показано в примере 5.2., вероятность измерения собственного значения $\hat{P}_n$ есть $p = Sp(\hat{P}\cdot\varrho)$. Соответствие между проекторами кубитов и точками на сфере Блоха означает, что вероятность первого измерения состояния "спин-вверх" вдоль оси $\vec{n}$ первого кубита, а затем измерения состояния "спин-вверх" вдоль оси $\vec{m}$ второго кубита есть:

$$
\begin{aligned}
p \; &= Sp_B\,\left[\hat{P}_m\, Sp_A\left[\left(\hat{P}_n\otimes I_B\right)\,\varrho\right]\right] \\
p \; &= Sp_B\,\left[\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{1}+\hat{\mathbf{m}}\cdot\sigma_B\right)\right) Sp_A\,\left[\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{1}+\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma_A\right)\otimes I_B\right)\,\varrho\right]\right].
\end{aligned}
$$

Проектор $\hat{P}_m$ действует как постоянный сомножитель относительно шпура по переменным системы A, так как его действие тривиально в подсистеме A. В силу линейности операций вычисления шпура можно вынести эту константу из под знака операции вычисления шпура

$$
\begin{aligned}
p \; &= Sp_B\, Sp_A\,\left[\left(I_A\otimes\frac{1}{2}\left(\mathbf{1}+\hat{\mathbf{m}}\cdot\sigma_B\right)\right)\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{1}+\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma_A\right)\otimes I_B\right)\,\varrho\right] \\
&= Sp_B\, Sp_A\,\left[\left(\frac{1}{2}\left(\mathbf{1}+\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma_A\right)\otimes\frac{1}{2}\left(\mathbf{1}+\hat{\mathbf{m}}\cdot\sigma_B\right)\otimes I_B\right)\,\varrho\right]
\end{aligned}
$$

Используя вид ϱ заданной в примере можно вычислить эти шпуры точно, основываясь на свойствах линейности операций вычисления шпура и равенстве нулю шпура матриц Паули

$$\begin{aligned}
&= Sp_B\, Sp_A \left[\left(\frac{1}{2} \left(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_A \right) \otimes \frac{1}{2} \left(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{m}} \cdot \sigma_B \right) \right) \left(\frac{1}{8} \mathbf{1}_{AB} + \frac{1}{2} \left| \psi^- \right\rangle \left\langle \psi^- \right| \right) \right] \\
&= \frac{1}{32} Sp_B\, Sp_A \left[\left(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_A \right) \otimes \left(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{m}} \cdot \sigma_B \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{8} Sp_B\, Sp_A \left[\left(\left(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_A \right) \otimes \left(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{m}} \cdot \sigma_B \right) \right) \left(\left| \psi^- \right\rangle \left\langle \psi^- \right| \right) \right] \\
&= \frac{1}{32} Sp_B\, Sp_A \left[\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right] + \frac{1}{8} \left\langle \psi^- \right| \left(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_A \right) \otimes \left(\mathbf{1} + \hat{\mathbf{m}} \cdot \sigma_B \right) \left| \psi^- \right\rangle \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left\langle \psi^- \right| \mathbf{1} + \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_A + \hat{\mathbf{m}} \cdot \sigma_B + \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_A \otimes \hat{\mathbf{m}} \cdot \sigma_B \left| \psi^- \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \left\langle \psi^- \right| \sigma_A \left| \psi^- \right\rangle + \hat{\mathbf{m}} \cdot \left\langle \psi^- \right| \sigma_B \left| \psi^- \right\rangle + \left\langle \psi^- \right| \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_A \otimes \hat{\mathbf{m}} \cdot \sigma_B \left| \psi^- \right\rangle \right)
\end{aligned}$$

Средние значения как σ_A, так и σ_B равны нулю в синглетном состоянии $|\psi^-\rangle$, что может быть доказано как непосредственными вычислениями, так и на основании того, что синглет – это скаляр (спин $=0$). Единственный член, который остается для вычисления – это последнее слагаемое в полученном выражении. Имеется несколько возможностей для вычисления. По видимому простейший способ доказать, что спин – 0 симметрии синглетные состояния имеют одну форму в любом базисе. Поэтому можно взять спины относительно z-осей: $\vec{n} = \hat{\mathbf{z}}$, $\vec{m} = \hat{\mathbf{z}} \cos\theta + \hat{\mathbf{x}} \sin\theta$, так что:

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi^- \right| \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma_A \otimes \hat{\mathbf{m}} \cdot \sigma_B \left| \psi^- \right\rangle &= \left\langle \psi^- \right| \sigma_z \otimes \sigma_z \left| \psi^- \right\rangle \cos\theta + \left\langle \psi^- \right| \sigma_z \otimes \sigma_x \left| \psi^- \right\rangle \sin\theta \\
&= -\cos\theta.
\end{aligned}$$

Это приводит нас к ответу:

$$p = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cos\theta.$$