Семинар 3

3.5 Кубит

Простейшим Гильбертовым пространством является пространство двух квантовых состояний H_2. Обозначим ортонормированный базис такого двумерного пространства состояний $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ или сокращенно $\{|i\rangle\}$ $i = 1,2$ $\langle i | j \rangle = \delta_{ij},\ ij \in 1,2$. В соответствии с принципом суперпозиции наиболее общее нормированное состояние в H_2 может быть представлено в виде:

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,, \quad \langle \psi | \psi \rangle = |a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{3.1}$$

где a и b — комплексные числа. Состояние (3.1) в теории квантовых вычислений называется **кубитом** (quantum bit≡qubit). Проектируя состояние кубита на ортонормированный базис $\{|i\rangle\},\ i = 1,2$, получим

$$\langle 0 | \psi \rangle = a; \qquad \langle 1 | \psi \rangle = b, \tag{3.2}$$

где $|a|^2$— вероятность обнаружить в состоянии $|\psi\rangle$ состояние $|0\rangle$, а $|b|^2$— вероятность обнаружить в состоянии $|\psi\rangle$ состояние $|1\rangle$. Общая фаза кубита, в соответствии с постулатами квантовой теории физического смыла не имеет, т.е. состояния $|\psi\rangle$ и $\exp(i\alpha)\,|\psi\rangle$ тождественны.

$$|\psi\rangle \equiv e^{i\alpha}\,|\psi\rangle\,, \qquad \alpha - \mathrm{Re}. \tag{3.3}$$

После проектирования на ортонормированный базис состояние кубита $|\psi\rangle$ переходит или в состояние $|0\rangle$ $(|\psi\rangle \to |0\rangle)$ или в состояние $|1\rangle$ $(|\psi\rangle \to |1\rangle)$.

В квантовой теории информации кубит определяется как единица квантовой информации, аналогично тому, как бит (0 или 1) определяется как единица классической теории информации.

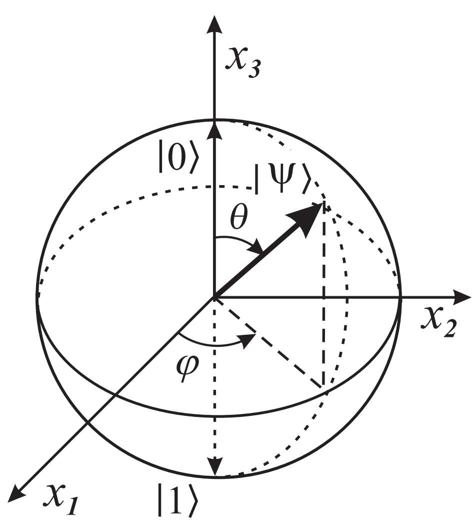

рис.2.1

Однако в отличие от понятия бит информации в классической теории, которая может быть считана (измерена) без разрушения состояния бита, кубит при считывании (измерении) переходит в одно из двух своих базисных состояний $|0\rangle$ или $|1\rangle$.

Понятие кубита имеет формально простую "геометрическую" интерпретацию в воображаемом пространстве состояний. Два комплексных числа a и b в (3.1) содержат 4 действительных параметра. В силу условия нормировки независимыми являются три из них. С учетом свойств квантовых состояний (3.3) достаточно два действительных параметра для описания кубита. Таким образом, если представить выражение (3.1) в виде:

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle\,, \tag{3.4}$$

то действительные параметры θ и φ определяют точку на сфере, как показано на рис.2.1. Вектор, соединяющий начало координат этого воображаемого пространства с точкой на сфере задает геометрическую интерпретацию вектора состояния $|\psi\rangle$ или кубита. Геометрическое место точек "конца" вектора состояния образуют сферу единичного радиуса.

Эта сфера часто называется сферой Блоха. Как видно при $\varphi = 0$ и $\theta = 0$ вектор $|\psi\rangle$ направлен по оси x_3. Соответственно при $\theta = \pi-$ вектор направлен против оси x_3. То есть при такой интерпретации "ортогональными" являются векторы противоположного направления. Можно задать весьма интересный вопрос о том, сколько информации может быть записано в одном кубите? Если на сфере Блоха за точками сферы закрепить какую-то определенную "информацию", то как это не парадоксально в кубит можно записать бесконечное число информации! Однако считать из кубита можно только или состояние $|0\rangle$ или $|1\rangle$, то есть две единицы классической информации. Таково содержание постулата об измерении в квантовой теории. Нет необходимости отвечать на вопрос почему так устроена природа, тем более, что это никому в настоящее время неизвестно. Принципы квантовой теории можно принимать или не принимать, однако предсказания и следствия вытекающие из квантовой теории пока согласуются с наблюдаемыми экспериментальными результатами.

3.6 Спин $1/2$

Спин — это векторное свойство ряда частиц (аналогичное заряду или массе), которое проявляется во внешнем поле. Спин — это внутренний (то есть неотъемлемый от частицы) механический момент, который ориентируется в пространстве строго дискретным образом по отношению к выделенному направлению.

Первоначально спин был открыт у электрона в опытах Штерна-Герлаха. Спин электрона, обозначаемый $\vec{s}$ (внутренний момент) ориентируется в пространстве только двояко, так что проекция спина на направление поля (ось z) принимает одно из двух значений $s_z = \pm\hbar/2$. В последствии спин с аналогичными свойствами был обнаружен и у ряда других частиц, например, протон, нейтрон и т.п. В дальнейшем было установлено, что существуют частицы, проекция внутреннего момента которых принимает значения $0, \pm\hbar$, или $\pm 1/2\hbar, \pm 3/2\hbar$. В то же время экспериментально установлено, что у ряда частиц данное свойство отсутствует. В этом смысле частицы делятся на спиновые (обладающие спином) и бесспиновые. В свою очередь частицы, обладающие спином делятся на частицы с целой (в единицах $\hbar$) проекцией спина (бозоны) и полуцелой проекцией (фермионы). Принято говорить о "величине" спина, связывая его с максимально возможной проекции на направление поля (в единицах $\hbar$). То есть частицы со спином $1/2$, 1, $3/2$, $2\ldots$.

Совокупность частиц, в которую входят — электрон, протон, нейтрон и ряд других, образуют группу частиц со спином $1/2$.

Квантовомеханическое описание частиц со спином $1/2$ основано на использовании оператора спина электрона $\hat{s}$. Так как оператор спина является внутренним механическим моментом, его компоненты удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и компоненты оператора момента импульса (или в общем случае оператора углового момента):

$$[\, s_i, s_j \,] = i\hbar\varepsilon_{ijk}s_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{3.5}$$

ε_{ijk} — тензор Леви-Чивита.

В классической электродинамике установлено, что для заряженной частицы с зарядом e и массой m связь между механическим $\vec{\ell}$ и магнитным моментом $\vec{\mu}$ имеет вид:

$$\vec{\mu} \equiv \frac{1}{2c} \int [\vec{r} \times \vec{j}]\, dv = \frac{e}{2mc} \cdot \vec{\ell} = \frac{e}{2mc} [\vec{r} \times \vec{p}]. \tag{3.6}$$

Здесь c— скорость света, $\vec{p}$— импульс частицы $\vec{p} = m\vec{v}$, $\vec{v}$— скорость, $\vec{j}$— плотность тока, $\vec{j} = \varrho\vec{v}$, ϱ— плотность заряда. Для точечной частицы $\varrho = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_\ell)$, $\vec{r}_\ell$— радиус вектор заряда в пространстве.

В квантовой теории с внутренним механическим моментом $\vec{s}$ связан магнитный спиновый момент $\vec{\mu}_s$. Связь между этими векторами была установлена экспериментально в опытах Эйнштейна-де Гааза и имеет вид:

$$\vec{\mu}_s = \frac{e}{mc} \cdot \vec{s}. \tag{3.7}$$

Выражение (3.7) отличается от (3.6) множителем 2, что подчеркивает неклассические свойства спина. И спин, и магнитный спиновый момент частиц играют существенную роль как в области микромира, так и в поведении макротел. Поэтому исследование этого свойства является важной задачей квантовой теории.

Для построения вида оператора спина 1/2 (или спина электрона) можно опереться на основное его свойство – наличие только двух значений проекций спина s_z, которые могут быть экспериментально измерены. Так как в своем собственном представлении оператор физической величины есть диагональная матрица, размерности равной числу собственных значений, на главной диагонали которой стоят собственные числа, то в s_z-представлении (то есть представлении, когда ось квантования спина есть ось z) оператор $\hat{s}_z$ равен:

$$\hat{s}_z = \begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Для определения вида операторов $\hat{s}_x$ и $\hat{s}_y$ в s_z-представлении выберем их в виде матриц размерности 2×2:

$$\hat{s}_x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \hat{s}_y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

где a_{ij} и b_{ij}— произвольные комплексные числа. Используя коммутационные соотношения (3.5) и условие эрмитовости оператора $\vec{s}$, можно установить явный вид матриц $\hat{s}_x$ и $\hat{s}_y$— в s_z-представлении:

$$\hat{s}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{s}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Вместо матриц операторов проекций спина удобно ввести безразмерные матрицы $\vec{\sigma}$, которые называются матрицами Паули ($\vec{s} = \hbar/2\, \vec{\sigma}$):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Ниже для проекций матриц Паули тождественно будут использованы алгебраические обозначения $\sigma_x \equiv \sigma_1$, $\sigma_y \equiv \sigma_2$, $\sigma_z \equiv \sigma_3$.

3.7 Свойства матриц Паули

Как следует из определения матриц Паули (3.11) данные матрицы:

– **Эрмитовы** и **унитарны**

$$\sigma_i = \sigma_i^{-1} = \sigma^{\dagger}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.12}$$

– Сумма диагональных элементов матриц Паули равна нулю:

$$Sp\, \sigma_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.13}$$

– Определитель матриц Паули равен: -1

$$det\|\sigma_i\| = -1, \quad i \in 1, 2, 3. \tag{3.14}$$

– Матрицы Паули удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\sigma_i\sigma_k - \sigma_k\sigma_i = 2i\sigma_\ell, \quad i, k, \ell \in 1, 2, 3. \tag{3.15}$$

– Матрицы Паули **антикоммутативны**

$$\sigma_i\sigma_k = -\sigma_k\sigma_i, \quad i \neq k \tag{3.16}$$

– Квадрат любой матрицы Паули равен единице:

$$\sigma_i^2 = 1, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.17}$$

– Вместе с единичной двумерной матрицей I матрицы σ_i, $i = 1, 2, 3$ образуют полный набор в пространстве матриц размерности 2×2. То есть любая двумерная матрица A может быть представлена в виде:

$$A = \lambda_0 I + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \sigma_k, \tag{3.18}$$

где λ_k– числа $(k = 0, 1, 2, 3)$;

– Произведение всех трех матриц Паули есть единая матрица размерности 2×2:

$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z = i\, I, \tag{3.19}$$

где i– мнимая единица.

Объединяя перечисленные выше правила можно записать таблицу умножения, которой удовлетворяют Матрицы Паули.

	1	σ_x	σ_y	σ_z
I	I	σ_x	σ_y	σ_z
σ_x	σ_x	I	$i\sigma_z$	$-i\sigma_y$
σ_y	σ_y	$-i\sigma_z$	I	$i\sigma_x$
σ_z	σ_z	$i\sigma_y$	$-i\sigma_x$	I

Помимо декартовых компонент матриц Паули σ_i, $i = 1, 2, 3$ в физических приложениях используются их комбинации, которые называются циклическими компонентами матриц Паули:

$$\sigma_\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y; \quad \sigma_+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Циклические компоненты $\sigma_\pm$ не имеют собственных значений, так как не существует обратных к $\sigma_\pm$ матриц и эти матрицы не являются эрмитовыми матрицами.

Квадрат циклических компонент матриц Паули удовлетворяет соотношению:

$$\sigma_\pm^2 = (\sigma_x \pm i\sigma_y)^2 = \sigma_x^2 - \sigma_y^2 \pm i(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x) = 0$$

Таким образом $\sigma_\pm$ образуют объекты, которые дают пример, когда квадрат не нулевого элемента равен нулю.

Комбинации вида

$$\frac{1}{2}(1 \pm \sigma_i) \tag{3.21}$$

образуют идемпотентные матрицы (то есть матрицы, удовлетворяющие соотношениям вида $N = N^2$).

Матрицы вида:

$$P_+ = \frac{1}{2}\left(1 + \sigma_z\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_- = \frac{1}{2}\left(1 - \sigma_z\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

называются иначе операторами проектирования.

Собственные векторы матриц Паули удовлетворяют соотношению:

$$\hat{\sigma}_i \left| s_i \right\rangle = \lambda_i \left| s_i \right\rangle, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{3.23}$$

В силу (3.17) $\lambda_i = \pm 1$.

Очевидно, что собственные векторы оператора спина электрона являются двумерными векторами в Гильбертовом пространстве состояний. Для сопоставления компонентам этих векторов из абстрактного математического пространства векторов набора комплексных чисел воспользуемся состоянием с определенной проекцией спина на ось z $\left|s_z\right\rangle$. Здесь s_z- спиновая "переменная", принимающая только два значения $\pm\hbar/2$. Данный вектор позволяет ввести спиновые состояния в s_z-представлении $\left\langle s_z \middle| \vec{s} \right\rangle$. В результате на основе общей теории представлений, в s_z-представлении (представление, в котором оператор $\hat{s}_z-$ диагонален) уравнение (3.23) на собственные функции и собственные значения оператора $\hat{s}_z$ имеет вид:

$$\sigma_z \psi_\lambda(s_z) = \lambda \psi_\lambda(s_z) \tag{3.24}$$

или в матричном виде:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle s_z=+1/2\,|\lambda\rangle\\ \langle s_z=-1/2\,|\lambda\rangle\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\langle s_z=+1/2\,|\lambda\rangle\\ \langle s_z=-1/2\,|\lambda\rangle\end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Перепишем уравнение (3.25) в следующей форме:

$$\hat{\sigma_z}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}_\lambda=\lambda\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}_\lambda\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}_\lambda=\lambda\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}_\lambda. \tag{3.26}$$

Так как $\lambda=\pm1$ возникает два ортонормированных решения уравнения (3.26)

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}_{\lambda=+1}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\qquad\text{и}\qquad\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}_{\lambda=-1}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{3.27}$$

Учитывая ортогональность состояний условие нормировки для собственной функции оператора спина выглядит следующим образом:

$$\langle s_i\,|s_i\rangle=1=\sum_{\lambda=\pm1}\langle s_i\,|\lambda\rangle\langle\lambda\,|s_i\rangle=(a^*,b^*)\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=|a|^2+|b|^2=1. \tag{3.28}$$

В обозначениях принятых в квантовой теории представлений собственные функции оператора проекции спина на ось z должны записываться в форме:

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}_{\lambda=+1}\equiv\begin{pmatrix}\langle 1/2\,|1/2\rangle\\ \langle -1/2\,|1/2\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix};\quad\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}_{\lambda=-1}\equiv\begin{pmatrix}\langle 1/2\,|-1/2\rangle\\ \langle -1/2\,|-1/2\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{3.29}$$

Однако такая система обозначений достаточно громоздка и условно собственные "функции" оператора σ_z обозначают (для наглядности) в виде, формально совпадающем с обозначением вектора в Гильбертовом пространстве:

$$|0\rangle\equiv|\uparrow\rangle\equiv\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix};\qquad|1\rangle\equiv|\downarrow\rangle\equiv\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Следует подчеркнуть, что символическое обозначение собственных "функций"двух возможных спиновых функций в форме (3.30) по сути некорректно, но в силу тривиального характера спиновой переменной s_z такая условность не мешает пониманию. Более корректное обозначение этих "функций" таково:

$$|0\rangle\to\alpha\equiv\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix};\qquad|1\rangle\to\beta\equiv\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

где $\alpha-$ "функция"состояния спина "вверх", а $\beta-$ состояния спина "вниз".

Учитывая явный вид матриц Паули σ_k и вид собственных функций (3.31) или (3.27), или (3.29) нетрудно установить следующие равенства:

$$\begin{aligned}&\sigma_x\,|\uparrow\rangle=|\downarrow\rangle\,;\quad\sigma_y\,|\uparrow\rangle=i\,|\downarrow\rangle\,;\quad\sigma_z\,|\uparrow\rangle=|\uparrow\rangle\\ &\sigma_x\,|\downarrow\rangle=|\uparrow\rangle\,;\quad\sigma_y\,|\downarrow\rangle=-i\,|\uparrow\rangle\,;\quad\sigma_z\,|\downarrow\rangle=-\,|\downarrow\rangle\,.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Аналогично решению уравнений (3.25), (3.24) могут быть найдены собственные "функции" операторов σ_x и σ_y в s_z-представлении (с учетом (3.11)).

Так уравнение вида:

$$\sigma_x \psi_\lambda(s_z) = \lambda \psi_\lambda(s_z); \quad \lambda = \pm 1 \tag{3.33}$$

имеет следующие нормированные решения в s_z-представлении:

$$|\uparrow_x\rangle = \psi_{\lambda=+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \quad |\downarrow_x\rangle = \psi_{\lambda=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

где $|\uparrow_x\rangle$ и $|\downarrow_x\rangle$– состояния с проекцией спина на ось x вверх и вниз, соответственно. Нормированные решения уравнения на собственные функции оператора σ_y в s_z-представлении:

$$\sigma_y \Phi_\lambda(s_z) = \lambda \Phi_\lambda(s_z); \quad \lambda = \pm 1, \tag{3.35}$$

имеют вид:

$$|\uparrow_y\rangle = \Phi_{\lambda=+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}; \quad |\downarrow_y\rangle = \Phi_{\lambda=-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Для справки выпишем действия матриц $\sigma_\pm$ и их произведений на спиновые функции α и β

$$\sigma_+ |\uparrow\rangle = 0; \quad \sigma_- |\uparrow\rangle = 2|\downarrow\rangle; \quad \sigma_+ |\downarrow\rangle = 2|\uparrow\rangle; \quad \sigma_- |\downarrow\rangle = 0 \tag{3.37}$$

$$\sigma_+\sigma_- |\uparrow\rangle = 4|\uparrow\rangle; \quad \sigma_-\sigma_+ |\uparrow\rangle = 0; \quad \sigma_+\sigma_- |\downarrow\rangle = 0; \quad \sigma_-\sigma_+ |\downarrow\rangle = 4|\downarrow\rangle \tag{3.38}$$

В соответствии с (2.89) оператор поворота спинового состояния на угол φ вокруг оси $\vec{n}$ равен

$$\hat{R}_{\vec{n}}(\varphi) = \exp\left[-i\frac{\varphi}{\hbar}(\vec{S}\cdot\vec{n})\right] = \cos\frac{\varphi}{2} - i(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})\sin\frac{\varphi}{2}, \tag{3.39}$$

здесь учтено, что $(\vec{\sigma}\cdot\vec{n})^2 = 1$.

Так, в частном случае, оператор поворота вокруг оси $\vec{n}$ параллельной оси z на угол φ есть:

$$\hat{R}_z(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} - i\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix}e^{-i\varphi/2} & 0\\0 & e^{i\varphi/2}\end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Действуя оператором (3.40) на функцию состояния со спином "вверх" по оси z, получим:

$$\hat{R}_z |0\rangle = \begin{pmatrix}e^{-i\varphi/2}\\0\end{pmatrix} \Rightarrow e^{-i\varphi/2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \equiv |0\rangle, \tag{3.41}$$

в силу того, что общий фазовый множитель у "функции"не имеет физического значения.

Если осуществить поворот на угол $\varphi = \pi/2$ вокруг оси y

$$\hat{R}_y |0\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sigma_y\frac{1}{\sqrt{2}}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \psi_{\lambda=+1} \tag{3.42}$$

получим собственную функцию оператора σ_x состояния, спин вверх по оси x (3.34).

Из (3.34),(3.30) следует, что спиновое состояние — спин вверх по оси x может быть представлено в виде суперпозиции состояний спин-вниз спин-вверх по оси z, то есть:

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle\right). \tag{3.43}$$

Аналогично состояние – спин вниз по оси x есть суперпозиция вида:

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle\right). \tag{3.44}$$

В обоих представленных случаях (3.43), (3.44) измерение спина вдоль оси z с вероятностью $1/2$ приведет к значению спина вверх и значению спина вниз.

Однако, если рассмотреть состояние, являющееся суперпозицией вида:

$$|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow_x\rangle + |\downarrow_x\rangle\right), \tag{3.45}$$

то при измерении спина вдоль оси z с вероятностью равной единице получится значение спина "вверх" и никогда не будет обнаружено значение спина "вниз". Так как:

$$|a\rangle = \frac{1}{2} \left(|\uparrow\rangle_+ |\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle_- |\downarrow\rangle\right) = |\uparrow\rangle\,.$$

Суперпозиция состояний спина $1/2$ является физической моделью понятия кубита, введенного в предыдущем параграфе.

В общем случае имеются и другие физические системы, которые удовлетворяют определению кубита. Так любая двухуровневая квантовая система или состояния поляризации электромагнитного излучения, также приводят к физической реализации кубита.

3.8 Спиновый резонанс для свободного электрона

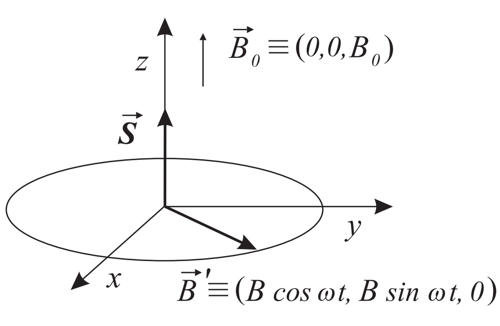

рис.3.1.

В качестве примера эволюции спинового состояния рассмотрим поведение спина, находящегося в магнитном поле с индукцией $\vec{B}_0$ (по оси z). Пусть в момент времени $t = 0$ включается переменное магнитное поле $\vec{B}'$, вектор который лежит в плоскости x и y, а спин находится в состоянии "спин-вверх"(рис. 3.1.) Найдем вероятность переворачивания спина в такой системе.

В координатном представлении оператор Гамильтона такой системы совпадает с потенциальной энергией взаимодействия спинового магнитного момента $\vec{\mu}_s$ с внешним полем $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$,

$$\hat{H} = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = -\frac{e\hbar}{2mc} (\vec{\sigma} \cdot \vec{B})$$

$$\hat{H} = \mu_0(\sigma_z B_0 + \sigma_x B'_x + \sigma_y B'_y) = \mu_0 \left[\sigma_z B_0 + \frac{1}{2} B' \left(\sigma_+ e^{-i\omega t} + \sigma_- e^{i\omega t}\right)\right], \quad \mu_0 \equiv \frac{e\hbar}{2mc}. \tag{3.46}$$

Уравнение Шредингера в этом случае имеет вид:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mu_0\left\{B_0\sigma_z + \frac{1}{2}\,B'\left(\sigma_+e^{-i\omega t} + \sigma_-e^{i\omega t}\right)\right\}\Psi. \tag{3.47}$$

Решение уравнения (3.47) можно представить в виде суперпозиции двух возможных спиновых состояний $|0\rangle$ и $|1\rangle$

$$\Psi(t) = u(t)\,|0\rangle + v(t)\,|1\rangle\,. \tag{3.48}$$

Подставляя (3.48) в (3.47) с учетом соотношений (3.37) и (3.32), получим систему уравнений

$$\begin{cases} i\dot{u} = \omega_0 u + \omega'\,e^{-i\omega t}v \\ i\dot{v} = -\omega_0 v + \omega' e^{i\omega t}u \end{cases} \tag{3.49}$$

где $\omega_0 \equiv \mu_0 B_0/\hbar$; $\omega' \equiv \mu B'/\hbar$.

Решение системы (3.49), удовлетворяющее начальному условию $\Psi(0) = |0\rangle$ равно:

$$\Psi(t) = \left[\cos(\Omega t) - \frac{\omega_0 - \omega/2}{\Omega}\,\sin(\Omega t)\right]\,\exp\left(-i\,\frac{\omega}{2}\,t\right)|0\rangle - \frac{\omega'}{\Omega}\,\sin(\Omega t)\,\exp\left(i\,\frac{\omega}{2}\,t\right)|1\rangle\,, \tag{3.50}$$

где $\Omega = \sqrt{(\omega_0 - \omega/2)^2 + \omega'^2}$.

Таким образом, вероятность измерения состояния "спин-вниз"равна квадрату модуля коэффициента перед состоянием $|1\rangle$

$$P(t) = \left(\frac{\omega'}{\Omega}\right)^2 \sin^2(\Omega t). \tag{3.51}$$

Усредненная за период вероятность в этом случае равна:

$$\big\langle P(t)\big\rangle = \frac{1}{2}\,\frac{\omega'^2}{\Omega^2} = \frac{\omega'^2}{(\omega_0 - \frac{1}{2}\,\omega)^2 + \omega'^2}. \tag{3.52}$$

Таким образом, если медленно менять B_0, то для $\omega_0 = \omega/2$ вероятность окажется максимальной, равной $\langle P\rangle_{max} = 1/2$, независимо от вращающегося поля. Такое поле B_0 – называется **резонансным**, а явление переворачивания спина — **спин-флип**.

Кроме того, в соответствии с (3.50), выключая магнитное поле в определенный момент времени можно получить суперпозицию состояний с требуемыми значениями u и v, (то есть приготовить кубит в нужной суперпозиции).

3.9 Двухуровневая система

рис.3.2.

Еще одним примером однокубитового состояния является двухуровневая система (рис. 3.2.). Пусть до момента $t = 0$ свойства системы определялись Гамильтонианом H_0, имеющим только два стационарных состояния

$$\hat{H}_0\,|k\rangle = E_k\,|k\rangle\,, \qquad k = 0, 1; \tag{3.53}$$

а в момент времени $t = 0$ система находилась в состоянии спин-ввверх $|0\rangle$. В момент времени $t = 0$ на систему накладывается не зависящее от времени взаимодействие $\hat{W}$ (например, постоянное поле). Дальнейшая эволюция системы удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = (\hat{H}_0 + \hat{W}) |\Psi\rangle . \tag{3.54}$$

Решение уравнения (3.54) можно представить в виде

$$|\Psi(t)\rangle = c_1(t)\, e^{-i\,\omega_1\, t}\, |0\rangle + c_2(t)\, e^{-i\,\omega_2\, t}\, |1\rangle , \tag{3.55}$$

(где $\omega_i = E_i/\hbar$) с начальным условием $c_1(0) = 1$; $c_2(0) = 0$.

Подставляя (3.55) в (3.54) и проектируя уравнение один раз на состояние $|0\rangle$, а второй — на состояние $|1\rangle$, получим систему уравнений для c_1 и c_2, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} c_1(t) =& e^{-i\lambda t}\left[\cos(\sigma t) + i\,\frac{\gamma}{2\sigma}\,\sin(\sigma t)\right] \\ c_2(t) =& -i\,\frac{W_{12}}{\hbar\sigma}\, e^{-i\,(\lambda-\omega_0)t}\sin(\sigma t), \end{aligned} \tag{3.56}$$

где $\hbar\sigma = \sqrt{\gamma^2/4 + |W_{12}|^2}$, $\hbar\gamma = W_{22} - W_{11} + \hbar\omega_0$, $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$; $W_{ij} \equiv \left\langle i \right| W \left| j \right\rangle$.

В результате вероятность найти в момент времени t систему в состоянии $|1\rangle$ есть:

$$|c_2(t)|^2 = \frac{4\,|W_{12}|^2}{(\hbar\gamma)^2 + 4\,|W_{12}|^2}\, \sin^2(\sigma t). \tag{3.57}$$

Соответственно усредненная за период вероятность найти систему в состоянии $|1\rangle$ равна:

$$\langle |c_2(t)|^2\rangle = \frac{2\,|W_{12}|^2}{(\hbar\gamma)^2 + 4\,|W_{12}|^2}. \tag{3.58}$$

Таким образом, такая система также попадет под определение кубита и может рассматриваться как его модельная реализация.

3.10 Поляризация фотонов.

Еще одним важным "двухуровневым" элементом является состояние поляризации электромагнитного поля (или фотона). Фотон отличается от частиц со спином 1/2 тем, что является безмассовой и имеет спин 1. У фотона имеются два состояния поляризации. Например, для фотона распространяющегося вдоль оси z есть два состояния линейной поляризации (вдоль оси x и y), которые обозначим $|x\rangle$ и $|y\rangle$. Поворот системы координат на угол θ относительно оси z приводит к преобразованиям вектора поляризации

$$\begin{aligned} |x\rangle &\Rightarrow \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle \\ |y\rangle &\Rightarrow -\sin\theta\,|x\rangle + \cos\theta\,|y\rangle . \end{aligned} \tag{3.59}$$

Матрица преобразований

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

имеет следующие собственные векторы состояний

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}; \qquad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$$

с собственными значениями $\exp(\pm i\theta)$, которые определяют состояния правой и левой циркулярной поляризации.

В этом случае явление квантовой интерференции может быть описано следующим образом. Пусть есть поляризационный анализатор, который пропускает только одно из двух состояний линейной поляризации. Тогда x или y поляризованный фотон имеет вероятность $1/2$ прохождения через анализатор, повернутый на $45°$ относительно осей поляризации. А фотон поляризованный под углом $45°$ имеет вероятность $1/2$ прохождения через анализатор, ось которого совпадает с осью x или y. При этом x-поляризованный фотон никогда не пройдет через y-ориентированный анализатор.

Если мы поместим анализатор, повернутый на $45°$ между x и y-анализаторами, то $1/2$ фотонов пройдет через каждый анализатор. Но если мы удалим промежуточный анализатор, то ни один фотон не пройдет через y-анализатор. Легко может быть сконструировано устройство, которое поворачивает линейную поляризацию фотона и таким образом применяет преобразование (**) к кубиту, который задается двумя состояниями поляризации. Однако если имеется одновременно устройство, которое меняет относительную фазу двух ортогональных линейно-поляризованных состояний

$$\begin{aligned} |x\rangle &\rightarrow e^{i\omega/2}\,|x\rangle \\ |y\rangle &\rightarrow e^{-i\omega/2}\,|y\rangle \end{aligned}$$

то такие два устройства совместно могут быть использованы как устройство, осуществляющее 2×2 унитарное преобразование состояний поляризации фотона, что так же моделирует эволюцию однокубитового состояния.