

Семинар 10. Квантовая телепортация.

Квантовая телепортация – это передача квантового состояния из одного места в другое даже при отсутствии квантового канала связи между отправителем и получателем.

Для объяснения смысла телепортации положим, что два человека Алиса и Боб в прошлом находились в одном месте и приготовили *EPR*-пару из двух кубитов. Затем эти люди разъехались в разные места, но каждый из них взял с собой один кубит из *EPR*-пары. По истечении длительного времени Алисе потребовалось передать некий кубит $|\Psi\rangle$ Бобу:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (10.1)$$

При этом Алиса не знает состояния кубита $|\Psi\rangle$, то есть не знает величины коэффициентов α и β и имеет возможность связаться с Бобом только по классическому каналу связи.

В соответствии с общими принципами квантовой механики и теоремой о неклонировуемости квантового состояния, Алиса не может без разрушения кубита $|\Psi\rangle$ определить коэффициенты α и β и просто передать их значения Бобу, чтобы он изготовил соответствующий кубит $|\Psi\rangle$ у себя. Однако Алиса может поступить следующим образом. Алиса осуществляет взаимодействие кубита $|\Psi\rangle$ с кубитом, который входит в ее *EPR*-пару, а затем производит измерение над образовавшимся двух-кубитовым состоянием, получая один из четырех возможных классических результатов 00, 01, 10, 11. Затем она посылает эту информацию Бобу. В зависимости от сообщения, которое пошлет Алиса Боб выполняет одну из четырех операций к своему кубиту из *EPR*-пары. В результате у Боба появиться кубит в состоянии $|\Psi\rangle$. Это и есть квантовая телепортация.

Квантовая цепь изображенная на Рис.10.1 дает точное описание процесса телепортации. Состояние, которое должно быть передано определяется выражением (10.1), где α и β неизвестны.

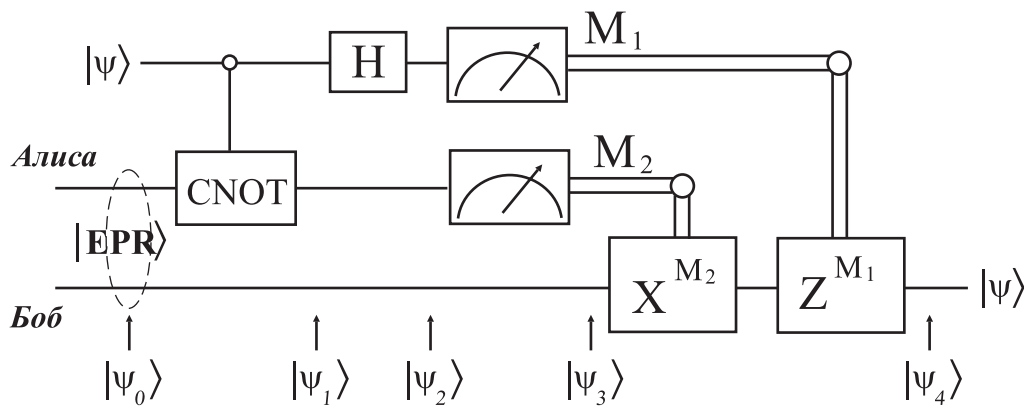


рис.10.1

Начальное состояние цепи определяется выражением:

$$|\Psi_0\rangle = |\Psi\rangle |EPR\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \alpha |0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta |1\rangle (|00\rangle + |11\rangle) \}. \quad (10.2)$$

Здесь принято, что первые два (слева-направо) кубита принадлежат Алисе, а третий кубит Бобу. Далее Алиса пропускает свои два кубита через *CNOT*-гейт. При этом получается

состояние $|\Psi_1\rangle$:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \alpha |0\rangle (|00\rangle + |11\rangle) + \beta |1\rangle (|00\rangle + |11\rangle) \} \quad (10.3)$$

Затем Алиса пропускает первый кубит через гейт Адамара. В результате состояние рассматриваемых кубитов $|\Psi_2\rangle$ будет иметь вид:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} \{ \alpha (|0\rangle + |1\rangle) (|00\rangle + |11\rangle) + \beta (|0\rangle - |1\rangle) (|10\rangle + |01\rangle) \} \quad (10.4)$$

Перегруппировав члены в (10.4), соблюдая выбранную последовательность принадлежности кубитов Алису и Бобу, получим:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{2} \{ |00\rangle (\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) + |01\rangle (\alpha |1\rangle + \beta |0\rangle) + |10\rangle (\alpha |0\rangle - \beta |1\rangle) + |11\rangle (\alpha |1\rangle - \beta |0\rangle) \}. \quad (10.5)$$

Отсюда видно, что если, например Алиса выполнит измерения состояний своей пары кубитов и получит 00 (то есть $M_1 = 0, M_2 = 0$), то кубит Боба будет находиться в состоянии $|\Psi\rangle$, то есть именно в том состоянии, которое Алиса хотела передать Бобу. В общем случае, в зависимости от результата измерения Алисы состояние кубита Боба, после процесса измерения будет определяться одним из четырех возможных состояний.

Результат измерения Алисы	Состояние кубита Боба	Действия Боба	Окончательное состояние
00	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$	1	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
01	$\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$	X	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
10	$\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$	Z	$-\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$
11	$\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$	XZ	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$

(10.6)

Однако для того чтобы узнать в каком из четырех состояний находится его кубит Боб должен получить классическую информацию о результате измерения выполненного Алисой. Как только Боб узнает результат измерения Алисы он может получить состояние исходного кубита Алисы $|\Psi\rangle$ выполняя соответствующие схеме (10.6) квантовые операции. Так если Алиса сообщила ему, что результат ее измерения 00, то Бобу ничего не нужно делать с его кубитом — он находится в состоянии $|\Psi\rangle$, то есть результат передачи уже достигнут. Если же измерение Алисы дает результат 01, то Боб должен подействовать на свой кубит гейтом X. Если измерение Алисы дает 10, то Боб должен применить гейт Z. Наконец, если результат был 11, то Боб должен подействовать гейтами X · Z, чтобы получить передаваемое состояние $|\Psi\rangle$.

Суммарно квантовая цепь описывающая явление телепортации приведена на рис ???. Имеется ряд обстоятельств для явления телепортации, которые должны быть объяснены с учетом общезначимых принципов. Например, может создаться впечатление, что телепортация позволяет передавать квантовое состояние мгновенно и следовательно быстрее скорости света. Это утверждение находится в прямом противоречии с

теорией относительности. Однако в явлении телепортации нет противоречия с теорией относительности, потому что для осуществления телепортации Алиса должна передать результат своего измерения по классическому каналу связи, а телепортация не передает никакой информации. Напомним, что немедленно до проведения измерений Алисой квантовое состояние трех кубит определяется выражением (10.5). Измерения выполняемые Алисой дают вероятность $1/4$ для любого из четырех представленных состояний $|ij\rangle [\alpha|0\rangle \pm \beta|1\rangle]$ ($i, j \in 01$). Таким образом оператор плотности такой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho = \frac{1}{4} & \left[|00\rangle \langle 00| (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|) + \right. \\ & + |01\rangle \langle 01| (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)(\alpha^* \langle 1| + \beta^* \langle 0|) + \\ & + |10\rangle \langle 10| (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)(\alpha^* \langle 0| - \beta^* \langle 1|) + \\ & \left. + |11\rangle \langle 11| (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)(\alpha^* \langle 1| - \beta^* \langle 0|) \right] \end{aligned} \quad (10.7)$$

Вычисляя шпур от ρ по переменным системы кубитов Алисы, получим приведенную матрицу плотности кубита, находящегося у Боба.

$$\begin{aligned} \rho^B &= \frac{1}{4} \left[(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha^* \langle 0| + \beta^* \langle 1|) + \right. \\ & + (\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle)(\alpha^* \langle 1| + \beta^* \langle 0|) + \\ & + (\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle)(\alpha^* \langle 0| - \beta^* \langle 1|) + \\ & \left. + (\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)(\alpha^* \langle 1| - \beta^* \langle 0|) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left((|\alpha|^2 + |\beta|^2) |0\rangle \langle 0| + (|\alpha|^2 + |\beta|^2) |1\rangle \langle 1| \right) = \\ &= \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \left[|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1| \right] = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (10.8)$$

Таким образом состояние кубита Боба после измерения выполненного Алисой, но до того как Боб узнал результат определяется $\rho^B \equiv 1/2$. Это состояние не зависит от состояния кубита $|\Psi\rangle$ и следовательно любое измерение выполненное Бобом не будет содержать информации о $|\Psi\rangle$. Таким образом без передачи классической информации нельзя получить состояние $|\Psi\rangle$ и нет нарушения принципов теории относительности. Следующим нетривиальным и удивительным результатом является возможность создания копии квантового состояния, что противоречит теореме невозможности клонирования (копирования) квантового состояния, которая обсуждалась ранее. В этом утверждении так же не содержится противоречий основным физическим принципам, так как после осуществления явления телепортации только кубит мишени (Боба) находится в состоянии $|\Psi\rangle$, а исходный кубит находится (в результате измерения) в одном из базисных состояний $|0\rangle$ или $|1\rangle$.

В практическом смысле телепортация показывает, что *EPR*-пара совместно с двумя классическими битами информации образуют ресурс по передаче одного кубита информации.