

## §1 Электромагнитные волны в вакууме

Система уравнений Максвелла имеет отличные от нуля решения даже при отсутствии зарядов и токов. Эти решения соответствуют переменному электромагнитному полю, которое может существовать вдали от источника его создавшего. При отсутствии зарядов и токов, путем вычисления операции rot от закона электромагнитной индукции Фарадея и от обобщенного закона Ампера можно получить уравнения, которым удовлетворяют вектор напряженности электрического поля и вектор индукции магнитного поля в вакууме:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

### Волновое уравнение.

Уравнения (1) являются однородными волновыми уравнениями и для каждой скалярной функции проекции векторов имеют общую структуру волнового уравнения:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Данное уравнение имеет несколько типов решений, которые играют важную роль в теории электромагнитного поля.

### Плоская волна.

Один из этих типов - плоские волны. Если  $\mathbf{r}$  - радиус- вектор произвольной точки в пространстве, а  $\mathbf{s}$  - единичный вектор в произвольном направлении, то любое решение уравнения (2) вида  $\phi = \phi(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}, t)$  называется **плоской волной**, так как в любой момент времени функция  $\phi$  имеет постоянное значение в плоскостях  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = \text{const}$ , перпендикулярных к единичному вектору  $\mathbf{s}$ . Если выбрать положение новых декартовых осей так, чтобы ось  $z'$  была направлена вдоль вектора  $\mathbf{s}$ , то  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = xs_x + ys_y + zs_z = z'$ . При этом из данного определения очевидно, что:

$$\frac{\partial}{\partial x} = s_x \frac{\partial}{\partial z'}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = s_y \frac{\partial}{\partial z'}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = s_z \frac{\partial}{\partial z'}; \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Следовательно, волновое уравнение (2) будет иметь в этой системе координат вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v} = 0, \quad (3)$$

где  $u = z' - ct$ ,  $v = z' + ct$ . Общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$\phi = \phi_1(u) + \phi_2(v) = \phi_1(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - ct) + \phi_2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + ct), \quad (4)$$

где  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  произвольные функции. Видно, что аргумент функции  $\phi_1$  не изменяется при замене  $(z', t)$  на  $(z' + c\tau, t + \tau)$ , где  $\tau$  - произвольный интервал времени. Поэтому функция  $\phi_1$  описывает возмущение, распространяющееся со скоростью  $c$  в положительном направлении вектора  $\mathbf{s}$ . Аналогично функция  $\phi_2$  определяет возмущение, распространяющееся с той же скоростью, но против положительного направления вектора  $\mathbf{s}$ .

### Сферическая волна.

Кроме плоских волн волновое уравнение допускает решения в виде сферически расходящихся и сходящихся волн. Рассмотрим сферически симметричные решения волнового уравнения в произвольной сферической системе координат  $\phi = \phi(r, t)$ , где  $r$  - расстояние от начала координат до произвольной точки. В этом случае уравнение в переменных сферической системы координат имеет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = 0. \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \phi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \phi) = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с волновым уравнением для плоских волн, если выполнить замены  $z' \rightarrow r$  и  $\phi \rightarrow r\phi$ . Таким образом в случае сферических волн решение волнового уравнения есть:

$$\phi = \frac{1}{r} \phi_1(r - ct) + \frac{1}{r} \phi_2(r + ct). \quad (5)$$

Как и в случае плоских волн функции  $\phi_1$  и  $\phi_2$  - произвольные функции, при этом первое слагаемое в (5) - расходящаяся из начала координат сферическая волна, а  $\phi_2$  - сферическая волна сходящаяся к началу координат.

### Гармоническая волна.

Для переменного электромагнитного поля особый интерес представляет периодическая зависимость решения волновых уравнений от времени. В случае, если зависимость от времени решения волнового уравнения в фиксированной точке пространства определяется выражением:  $a \cos(\omega t + \delta)$ , то такие решения называются **гармоническими**. При этом  $a$  - называется **амплитудой волны**,  $\omega t + \delta$  - **фазой**,  $\omega$  - **угловой частотой**.  $\omega$  определяет число колебаний за  $2\pi$  секунд. Величина  $T = 2\pi/\omega$  называется **периодом колебаний**, так как при изменении  $t \rightarrow t + T$  величина решения не меняется. Гармоническая плоская волна есть:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = a \cos \left[ \omega \left( t - \frac{1}{c} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \right) + \delta \right].$$

Величина гармонической функции  $\phi$  не меняется, если заменить  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} + \lambda$ , где  $\lambda = 2\pi c/\omega = cT$  называется длиной волны.

### Волновой вектор.

В теории электромагнитного поля вводится вектор  $\mathbf{k} = \mathbf{s}\omega/c$ , который называется **волновым вектором**. В этом случае гармоническая плоская волна имеет вид  $a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ .

### Плоская электромагнитная волна.

Простейшим электромагнитным полем является поле плоской волны:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(u)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(u)$ , где  $u = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} - ct$ . Учитывая очевидные равенства

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u}; \quad (\text{rot } \mathbf{E})_i = [\mathbf{s} \times \mathbf{E}]_i,$$

из системы уравнений Максвелла для пустого пространства получим:

$$\left[ \mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} \right] = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u}; \quad \left[ \mathbf{s} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} \right] = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u};$$

Проинтегрировав последние уравнения по  $u$  и опуская постоянную интегрирования, что соответствует пренебрежению постоянным полем во всем пространстве, найдем связь векторов поля и вектора  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{E} = -[\mathbf{s} \times \mathbf{B}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{s} \times \mathbf{E}] \quad (6)$$

И найденных равенств очевидно, что  $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) = 0$ ,  $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) = 0$ . Равенства (6) выражают поперечность электромагнитного поля в неограниченном пространстве в вакууме. Другими словами векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{s}$  образуют правую ортогональную систему векторов, и векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  лежат в плоскости, ортогональной вектору в направлении распространения волны. Величины векторов поля равны  $E = B$ , но сами векторы ортогональны друг другу.

### Поляризация электромагнитных волн.

В случае плоской гармонической волны любая из декартовых компонент векторов поля имеет вид:

$$a \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta) = \text{Re} \{ a \exp [-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \delta)] \} = \text{Re} \{ a \exp [-i(\tau + \delta)] \}.$$

Выберем ось  $z$  в направлении вектора  $\mathbf{k}$ . В этом случае отличными от нуля компонентами поля являются только проекции векторов на оси  $y, x$ . Рассмотрим кривую, которую описывает конец вектора электрического поля со временем, в некоторой фиксированной точке пространства. Данная кривая является геометрическим местом точек, координаты которых равны  $E_x, E_y$ :

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1), \quad E_y = a_2 \cos(\tau + \delta_2). \quad (7)$$

Исключая из данных уравнений время, получим уравнение конического сечения:

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{a_1} \frac{E_y}{a_2} \cos \delta = \sin^2 \delta; \quad \delta \equiv \delta_2 - \delta_1. \quad (8)$$

Полученная кривая является эллипсом, вписанным в прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат и равны  $2a_1$  и  $2a_2$ . Оси эллипса не совпадают с направлением осей координат  $x, y$ . В этом случае говорят, что волна эллиптически поляризована. Волна, связанная с вектором индукции также имеет эллиптическую поляризацию. Различаются два типа эллиптической поляризации в соответствии с направлением, в котором конец электрического вектора описывает эллипс. Поляризация называется правой, если с точки зрения наблюдателя, смотрящего навстречу световому лучу, конец электрического вектора описывает эллипс, двигаясь по часовой стрелке. В случае, если вектор движется против часовой стрелки, поляризация называется левой.

В двух случаях эллипс вырождается в окружность и прямую линию. При условии  $\delta = m\pi$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$   $E_y = E_x (-1)^m a_2/a_1$  эллипс вырождается в прямую линию. В этом случае возникает линейная поляризация, одну из декартовых осей, например  $x$  можно направить вдоль этой прямой и остается только одна из компонент поля  $E_x$ , при этом вектор индукции поляризован вдоль оси  $y$ .

При условиях  $\delta = m\pi/2$ ,  $a_1 = a_2 = a$  уравнение (8) переходит в уравнение окружности  $E_x^2 + E_y^2 = a^2$ . При этом если  $\sin \delta > 0$  - поляризация правая, а для  $\sin \delta < 0$  - левая.

Если вместо вещественного описания компонент поля используется комплексное (экспонента вместо косинусов), то

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{a_2}{a_1} \exp[i(\delta_2 - \delta_1)] = \frac{a_2}{a_1} \exp(i\delta)$$

и из значения этого отношения можно определить также тип поляризации. Так линейная поляризация возникает при  $\delta = m\pi$ , правая круговая поляризация  $a_1 = a_2$ ,  $\delta = \pi/2$ , левая круговая поляризация  $a_1 = a_2$ ,  $\delta = -\pi/2$ .

## §2 Рассеяние электромагнитных волн

При взаимодействии переменного электромагнитного поля с зарядами на заряды со стороны поля действует переменная во времени сила. Под действием поля заряды начинают двигаться с ускорением и следовательно излучают электромагнитное поле. Следовательно при взаимодействии переменного поля с зарядами происходит преобразование первичного поля в поле излучаемое зарядами. Угловое распределение излучения, в принципе, происходит по всем направлениям. Таким образом происходит преобразование первичного поля в поле вынужденного излучения зарядов. В общем случае этот процесс называется рассеянием электромагнитного поля на зарядах. Заряды могут находиться как в свободном состоянии так и в связанном атомном состояниях.

### Рассеяние на осцилляторе.

Рассмотрим процесс рассеяния электромагнитных волн на примере заряженного линейного гармонического осциллятора. Пусть плоская монохроматическая линейно поляризованная электромагнитная волна частоты  $\omega$  падает на осциллятор. Уравнение движения в этом случае имеет вид:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{\mathbf{a}} + e\mathbf{E} \exp(i\omega t).$$

Здесь  $\mathbf{a}$  – ускорение и использована комплексная форма записи поля. В окончательных выражениях необходимо оставить действительную часть. Учитывая малость силы реакции излучения, можно написать приближенно  $\dot{\mathbf{a}} \approx -\omega_0 \dot{\mathbf{r}}$ , где  $\omega_0^2 = k/m$ . Таким образом уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} + \gamma \dot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} \mathbf{E} \exp(i\omega t); \quad \gamma \equiv \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3}. \quad (9)$$

Полагая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 \exp(i\omega t)$ , частное решение уравнения (9) можно представить в виде:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \frac{e}{m} \mathbf{E} \exp(i\omega t). \quad (10)$$

В соответствии с выражением (10) интенсивность излучения, рассеянного внутри телесного угла  $d\Omega$  может быть представлена в виде:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{n}]^2 d\Omega = \frac{e^4 \omega^4 E^2}{4\pi m^2 c^3} \frac{\sin^2 \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} \cos^2(\omega t - \delta) d\Omega,$$

где  $\delta = \arctg[\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)]$ ,  $\mathbf{n}$  – единичный радиус вектор в направлении точки наблюдения,  $\alpha$  – угол между вектором поля (вектором поляризации) и направлением радиус вектора точки наблюдения. Средняя за период  $T$  интенсивность излучения равна:

$$\langle dI \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dI dt = r_0 I_0 \frac{\omega^4 \sin^2 \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega.$$

Здесь  $r_0 = e^2/mc^2$  – классический радиус электрона.  $I_0 = cE^2/4\pi$ .

### Сечение рассеяния.

Процесс рассеяния электромагнитного поля принято характеризовать дифференциальным сечением рассеяния  $d\sigma$ , которое определяется как отношение интенсивности рассеянного излучения  $dI$  к интенсивности падающего излучения. Интенсивность падающего излучения определяется модулем вектора Умова-Пойнтинга  $|S| = cE^2/4\pi = I_0$ .

$$d\sigma = \frac{dI}{I_0}$$

### Сечение рассеяния на осцилляторе.

В результате для дифференциального сечения рассеяния электромагнитного поля на осцилляторе получим:

$$d\sigma = \frac{\langle dI \rangle}{I_0} = r_0 \frac{\omega^4 \sin^2 \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2} d\Omega. \quad (11)$$

$\cos \alpha$  есть проекция вектора  $\mathbf{n}$  на направление вектора напряженности  $\mathbf{E}$ . Если выбрать сферическую систему координат, в которой ось  $z$  направлена по вектору распространения электромагнитного поля  $\mathbf{k}$ , то с использованием угловых переменных  $\theta, \varphi$  выбранной сферической системы координат проекция вектора  $\mathbf{n}$  на направление вектора  $\mathbf{E}$  равна  $\sin \theta \cos \varphi$ .

Практически часто важно знать рассеяние неполяризованного излучения. Это означает, что необходимо провести усреднение выражения (11) по возможным направлениям поляризации. Это означает, что необходимо усреднить сечение по всем значениям азимутального угла  $\varphi$  сферической системы координат. Учитывая, что:

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle 1 - \cos^2 \alpha \rangle = \langle 1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \rangle = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} = \frac{1 + \cos^2 \theta}{2},$$

ясно, что максимальная величина интенсивности излучения приходится на значение углов  $\theta = 0, \theta = \pi$ , то есть в направлении падающего излучения и в противоположном направлении.

### Полное сечение рассеяния.

Интегрируя (11) по всем направлениям телесного угла получим полное сечение рассеяния неполяризованного излучения:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (12)$$

Данная формула носит название дисперсионной формулы классической электродинамики. Полученная дисперсионная формула на примере рассеяния электромагнитного поля на осцилляторе, имеет весьма общий характер и по форме совпадает с результатом, который получается в квантовой механике.

При малых частотах  $\omega \ll \omega_0$  выражение (12) имеет вид:

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

Соответственно при больших частотах  $\omega \gg \omega_0$  формула (12) переходит в формулу Томсона, полученную для сечения рассеяния электромагнитного поля на свободном заряде

$$\sigma \approx \frac{8\pi}{3} r_0^2.$$

## §3 Электромагнитные волны в однородных изотропных средах

Рассмотрим однородную изотропную среду, свойства которой определяются диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , магнитной проницаемостью  $\mu$ , удельной проводимостью  $\sigma$ . Материальные уравнения в этом случае имеют примитивный вид:  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Учитывая, что при наличии проводимости объемная плотность заряда в проводящей среде равна нулю, уравнения Максвелла в этом случае имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (13)$$

### Волновое уравнение.

Вычисляя ротор от законов электромагнитной индукции Фарадея и от обобщенного закона Ампера с учетом уравнений (13) найдем волновые уравнения для определения векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

Если искать решения данных уравнений в виде монохроматических волн частоты  $\omega$ , то есть  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ , то вместо последних уравнений получим:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad k \equiv \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu - i \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega}},$$

где  $k$  - величина комплексного волнового вектора, который удобно представить в виде:  $k = k_0(n - i\kappa)$ . Здесь  $k_0 = \omega/c$ , а  $n$  и  $\kappa$  называются коэффициентами преломления и поглощения, соответственно. Направление волнового вектора определяет направление распространения электромагнитной волны  $\mathbf{k} = k \mathbf{s}$ ,  $\mathbf{s}$  - единичный вектор в направлении распространения волны.

### Векторы поля.

Векторы электромагнитного поля могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}_1 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{H} = \mathbf{A}_2 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})].$$

Связь между электрическим и магнитным векторами следует из закона электромагнитной индукции Фарадея

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i[\mathbf{k} \times \mathbf{E}] = -i \frac{\omega}{c} \sqrt{n^2 + \kappa^2} [\mathbf{s} \times \mathbf{E}] \exp\left(-i \operatorname{arctg} \frac{\kappa}{n}\right).$$

Отсюда с учетом закона электромагнитной индукции Фарадея находим  $\mathbf{B} = \sqrt{n^2 + \kappa^2} [\mathbf{s} \times \mathbf{E}] \exp(-i \arctg \kappa/n)$ .

#### Коэффициенты затухания и преломления.

В отличие от случая распространения электромагнитных волн в вакууме, амплитуды электрического и магнитных полей отличаются друг от друга. Однако, как и в вакууме, электромагнитные волны в однородной, изотропной среде поперечны, но в среде происходит затухание электромагнитных волн по экспоненциальному закону. Величина затухания определяется параметром  $\kappa$ . Возводя в квадрат равенство

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu - i \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega}} = \frac{\omega}{c} (n - i\kappa),$$

найдем явный вид параметров  $n$  и  $\kappa$ :

$$n^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\epsilon^2 \mu^2 + \left( \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega} \right)^2} + \epsilon \mu \right\}, \quad \kappa^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\epsilon^2 \mu^2 + \left( \frac{4\pi \sigma \mu}{\omega} \right)^2} - \epsilon \mu \right\}.$$

Представленные формулы определяют закон дисперсии в среде с проводимостью. Знаки корней выбираются из условия, чтобы  $n$  и  $\kappa$  являлись действительными функциями и, чтобы параметр  $\kappa$ , характеризующий условия затухания поля был положительно определенной величиной.

Рассмотрим предельные случаи полученных выражений для  $n$  и  $\kappa$ . Пусть  $\sigma \ll \epsilon \mu \omega / 4\pi$ . В этом случае ток проводимости мал по сравнению с током смещения, что имеет место в идеальной диэлектрике, и представленные выражения упрощаются:  $n \approx \sqrt{\epsilon \mu}$ ,  $\kappa \approx 2\pi \sigma \sqrt{\mu} / \omega \sqrt{\epsilon}$ . Это означает, что  $n \gg \kappa$ . Если полностью пренебречь величиной  $\kappa$ , то такую среду принято называть прозрачной, так как в ней происходит распространение электромагнитной волны без затухания. В такой среде

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{B} = \sqrt{\epsilon \mu} \mathbf{A} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad \mathbf{k} = \frac{\omega}{v} \mathbf{s},$$

где  $v$  - фазовая скорость распространения волны равная  $v = c / \sqrt{\epsilon \mu}$ . Отсюда понятен смысл наименования коэффициента  $n$  как показателя преломления, так как в классической оптике показателем преломления называется отношение скоростей света в вакууме и среде  $n = c/v = \sqrt{\epsilon \mu}$ . Таким образом электромагнитные волны в непроводящей среде отличаются от волн в вакууме только скоростью распространения, которая в среде меньше скорости света в вакууме в  $n$  раз. Кроме того амплитуды электрического и магнитного полей различны, а фазы одинаковы. При наличии слабого поглощения фаза магнитного поля отстает от фазы электрического поля на величину  $\arctg(\kappa/n)$

В обратном предельном случае, когда ток проводимости много больше тока смещения находим:

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{2\pi \sigma \mu}{\omega}}.$$

В этом случае происходит сильное поглощение электромагнитного поля на небольших расстояниях и о распространении волны можно говорить только условно.

## §4 Отражение и преломление плоской волны

Если на границу раздела двух однородных сред падает плоская волна, то, в общем случае, она разделяется на две волны - отраженную и прошедшую во вторую среду. Существование двух волн вытекает из граничных условий, которым удовлетворяют векторы поля на границе раздела двух сред. Эти условия не удается выполнить, если не допустить возможность существования этих двух типов волн. Из общих соображений можно предположить, что образующиеся волны также как и падающая являются плоскими.

Одно из важных свойств плоской волны состоит в том, что волна полностью определена, если известно поведение волны во времени хотя бы в одной точке пространства. Действительно, если  $\mathbf{E}(t)$

представляет собой зависимость напряженности поля от времени в некоторой точке, то эта зависимость в другой точке, отстоящей от заданной на  $\mathbf{r}$ , будет  $\mathbf{E}(t - \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}/v)$ , где  $\mathbf{s}$  -единичный вектор в направлении распространения волны. На границе раздела двух сред вторичные поля будут также изменяться во времени, как и первичное поле падающей волны. Обозначим через  $\mathbf{s}^{(i)}$ ,  $\mathbf{s}^{(r)}$ ,  $\mathbf{s}^{(t)}$  единичные векторы в направлении распространения падающей, отраженной и прошедшей волн, соответственно. В соответствии с изложенными выше предположениями на границе раздела должны выполняться равенства

$$t - \frac{\mathbf{s}^{(i)} \cdot \mathbf{r}}{v_1} = t - \frac{\mathbf{s}^{(r)} \cdot \mathbf{r}}{v_1} = t - \frac{\mathbf{s}^{(t)} \cdot \mathbf{r}}{v_2}, \quad (14)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  -скорости распространения электромагнитного поля в первой и второй средах. В данном случае первой средой выбрана среда, в которой находится первичная падающая волна.

Пусть граница раздела двух сред находится в плоскости  $z = 0$ . Тогда, на границе раздела компоненты  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$  и на основании (14) можно установить равенства

$$\frac{x s_x^{(i)} + y s_y^{(i)}}{v_1} = \frac{x s_x^{(r)} + y s_y^{(r)}}{v_1} = \frac{x s_x^{(t)} + y s_y^{(t)}}{v_2}. \quad (15)$$

Так как данное равенство должно выполняться в любой точке поверхности на границе раздела, имеют место следующие соотношения:

$$\frac{s_x^{(i)}}{v_1} = \frac{s_x^{(r)}}{v_1} = \frac{s_x^{(t)}}{v_2}; \quad \frac{s_y^{(i)}}{v_1} = \frac{s_y^{(r)}}{v_1} = \frac{s_y^{(t)}}{v_2}. \quad (16)$$

Плоскость, определяемая вектором  $\mathbf{s}^{(i)}$  и вектором нормали к границе раздела называется плоскостью падения. Соотношения (16) показывают, что векторы  $\mathbf{s}^{(r)}$  и  $\mathbf{s}^{(t)}$  также лежат в плоскости падения. Выберем для определенности плоскостью падения плоскость  $xz$  и обозначим через  $\theta_i$ ,  $\theta_r$ ,  $\theta_t$  - углы, которые образуют единичные векторы  $\mathbf{s}$  падающей, отраженной и преломленной волн с положительным направлением оси  $z$  (предполагается, что ось  $z$  направлена из первой среды во вторую). В этом случае

$$s_x^{(j)} = \sin \theta_j; \quad s_y^{(j)} = 0; \quad s_z^{(j)} = \cos \theta_j; \quad j \in i, r, t.$$

### Законы отражения.

Подставляя эти соотношения в первую систему равенств (16), находим:

$$\frac{\sin \theta_i}{v_1} = \frac{\sin \theta_r}{v_1} = \frac{\sin \theta_t}{v_2}. \quad (17)$$

Отсюда вытекает, что синус угла падения равен синусу угла отражения. И так как  $\cos \theta_r \leq 0$ , найдем, что  $\cos \theta_r = -\cos \theta_i$  и следовательно  $\theta_r = \pi - \theta_i$ . Данные утверждения составляют закон отражения.

### Законы преломления.

На основании (17) найдем также, что:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{12}.$$

Данное соотношение вместе с утверждением о том, что вектор прошедшей волны лежит в плоскости падения составляет закон преломления или закон Снеллиуса. Если  $n_{12} > 1$  то

$$\sin \theta_t = \frac{1}{n_{12}} \sin \theta_i < \sin \theta_i,$$

то есть для каждого угла падения существует вещественный угол преломления. Однако, если вторая среда менее плотна, чем первая ( $n_{12} < 1$ ), то вещественное значение угла прохождения получается лишь для таких

углов падения, для которых  $\sin \theta_i \leq n_{12}$ . Для больших значений углов падения имеет место полное внутреннее отражение.

### Формулы Френеля.

Рассмотрение вопроса о связи амплитуд полей основано на граничных условиях. Разлагая каждый вектор на компоненты -параллельную  $A_{\parallel}$  и перпендикулярную  $A_{\perp}$  и обозначая амплитуду вектора электрического поля падающей волны буквой  $A$ , отраженной волны буквой  $R$  и прошедшей волны буквой  $T$ , можно установить формулы, которые называются формулами Френеля

$$T_{\parallel} = \frac{2\sin \theta_t \sin \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} A_{\parallel}, \quad T_{\perp} = \frac{2\sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp},$$

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)} A_{\parallel}, \quad R_{\perp} = -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} A_{\perp}.$$

Впервые эти соотношения были получены Френелем в 1823 году на основе его теории, рассматривавшей свет как колебания упругой среды. Для нормального падения  $\theta_i = 0 = \theta_t$  формулы Френеля имеют вид:

$$T_{\parallel} = \frac{2}{n+1} A_{\parallel}, \quad T_{\perp} = \frac{2}{n+1} A_{\perp}, \quad R_{\parallel} = \frac{n-1}{n+1} A_{\parallel}, \quad R_{\perp} = -\frac{n-1}{n+1} A_{\perp},$$

где  $n = n_2/n_1$ .

### Давление излучения.

Вопросы связанные с преломлением и отражением на поверхности металла относятся к специальному разделу - металлооптика. По сути такая задача решается на основе рассмотренного подхода с той разницей, что показатель преломления в этом случае становится комплексным и требуется уточнение некоторых понятий и определений. Рассмотрим в этой связи только вопрос об оценке величины давления, которое оказывает электромагнитное поле при нормальном падении на проводник. Под действием поля вблизи поверхности проводника возникает плотность электрического тока равная  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . В соответствии с определением силы Лоренца на бесконечно малый элемент объема  $dv$  действует бесконечно малая сила равная

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] dv = \frac{1}{c} j B \mathbf{n} dv = \frac{1}{c} j E \mathbf{n} dv = \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \mathbf{n}. \quad (18)$$

Здесь предположено, что в волне  $E = B$  и произведение  $jE dv$  определяет изменение энергии в единицу времени внутри  $dv$  в соответствии с законом сохранения энергии в дифференциальной форме,  $\mathbf{n}$  - единичный вектор в направлении распространения волны.

Рассмотрим теперь бесконечно малую площадку  $ds$  на поверхности металла. За интервал времени  $dt$  через эту площадку в проводник поступит энергия равная  $cdt ds w$ , где  $w = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})/8\pi$  - энергия единицы объема электромагнитного поля. Соответственно за единицу времени поступит энергия  $c w ds$ . В результате, на основании (18), силу действующую на бесконечно малый объем проводника можно представить в виде:  $d\mathbf{F} = \mathbf{n} w ds$ . Таким образом можно сказать, что на поверхности проводника возникает давление (сила на единицу поверхности), равное:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{F}}{ds} = w \mathbf{n} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} \mathbf{n}.$$

Данный результат соответствует случаю, когда все электромагнитное поле поглощается проводником. В общем случае можно ввести коэффициент отражения  $0 \leq k \leq 1$ , который будет определять какая доля энергии поля отражается от поверхности. При  $k = 0$  вся энергия поглощается проводником, при  $k = 1$  - вся энергия поля отражается от проводника (идеальное зеркало). В этом случае величина давления на поля на поверхность проводника равна  $\mathbf{p} = (1 + k) w \mathbf{n}$ .



## §5 Распространение энергии электромагнитного поля вдоль линий передач.

Линиями передач являются устройства, позволяющие направлено передавать энергию электромагнитного поля из одной области пространства в другую. Примерами таких устройств являются проводники электрического тока, кабели, волноводы и т.п. Плотность потока энергии электромагнитного поля, в общем случае, определяется вектором Умова-Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (19)$$

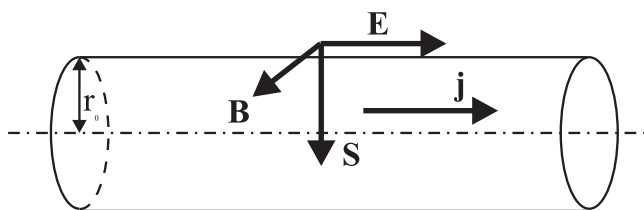


Рис. 1:

Исследование данного вектора в различных устройствах, служащих целям передачи энергии электромагнитного поля, позволяет установить физические процессы, сопровождающие процесс передачи энергии.

### Цилиндрический проводник.

Рассмотрим для примера длинный цилиндрический прямой проводник с радиусом сечения  $r_0$ , вдоль которого течет постоянный ток с плотностью  $\mathbf{j}$ . (см. рис. 1) При отсутствии сторонних сил, плотность тока внутри такого проводника равна:  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  и равномерно распределена по сечению проводника. Следовательно напряженность поля, поддерживающая этот постоянный ток есть:  $\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma$ .

Вектор касательной к проводнику и направление плотности тока в данном случае совпадают. Вследствие непрерывности тангенциальных составляющих напряженности электрического поля ( $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ ) на границе раздела проводник-вакуум и отсутствием нормальных к границе раздела составляющих напряженности поля внутри проводника, такое же поле  $\mathbf{j}/\sigma$  существует вблизи поверхности с внешней стороны проводника. Индукция магнитного поля  $\mathbf{B}$  вблизи поверхности и с внешней и с внутренней стороны проводника перпендикулярна вектору плотности тока  $\mathbf{j}$  и направлена по касательной к окружности, соосной с осью проводника. На поверхности проводника величина вектора индукции ортогональна вектору напряженности электрического поля и равна:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}, \quad 2\pi r_0 B = \pi r_0^2 \frac{4\pi}{c} j, \quad B = \frac{2\pi j r_0}{c}.$$

Таким образом, на внешней поверхности проводника вектор Умова-Пойнтинга направлен по радиусу проводника к его центру и равен:

$$S = \frac{c}{4\pi} EB \sin 90^\circ = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\sigma} j \frac{2\pi j r_0}{c} = \frac{j^2}{2\sigma} r_0.$$

Это означает, что внутрь проводника втекает энергия электромагнитного поля, которое создается постоянным током. Следовательно на участке проводника длиной  $l$  за единицу времени в проводник втекает энергия  $\varepsilon$  равная:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = S (2\pi r_0 l) = \frac{j^2}{2\sigma} r_0 (2\pi r_0 l) = \frac{1}{\sigma} j^2 \pi r_0^2 l = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) V, \quad (20)$$

где  $V$  -объем линейного цилиндрического проводника длины  $l$ .

### Закон сохранения энергии.

Закон сохранения энергии в системе заряды-поле означает, что работа, совершаемая полем над зарядами, производится либо за счет уменьшения энергии поля, либо за счет притока энергии в систему извне.

Покажем, что вся втекающая в проводник энергия электромагнитного поля в этом тривиальном примере тратится на нагревание проводника. В соответствии с законом Джоуля-Ленца количество теплоты  $Q$ , которое выделяется в единицу времени в линейном проводнике с сопротивлением  $R$ , по которому протекает ток  $I$  равно  $Q = RI^2$ . Применив этот закон к бесконечно малому цилиндру высоты  $dl$  с поперечным сечением  $ds$ , ось которого совпадает с направлением тока  $I$  получим  $dQ = (j ds)^2 (dl / (\sigma ds))$ . Таким образом, количество теплоты  $q$ , которое выделяется в единицу объема проводника в единицу времени равно  $q = j^2 / \sigma = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$ . Последнее равенство называется законом Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. Сравнивая это выражение с выражением для энергии втекающей в проводник (20) нетрудно убедиться в справедливости высказанного выше предположения. Следовательно, при прохождении электрического тока вся выделяемая в виде теплоты энергия поступает в проводник из окружающего пространства. Данный пример подсказывает, что в общем случае энергия передаваемая током по проводам, движется в пространстве, окружающем провода, т.е. провода играют роль направляющих, вдоль которых распространяется энергия.

### Кабель без сопротивления.

Рассмотрим процесс передачи энергии от источника к потребителю с помощью кабеля. Кабель можно рассматривать как два соосных цилиндрических проводника, пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Эти два проводника состоят из центрального провода и цилиндрической оболочки. По этим проводникам направление тока противоположно. В пространстве между проводниками возникает и магнитное, и электрическое поле. Структура магнитного поля аналогична полю линейного проводника - линии индукции образуют concentric окружности в плоскости ортогональной оси кабеля. Величина вектора магнитной индукции определяется выражением:  $2\pi r B_\alpha = 4\pi I / c$  или  $B_\alpha = 2I / cr$ .

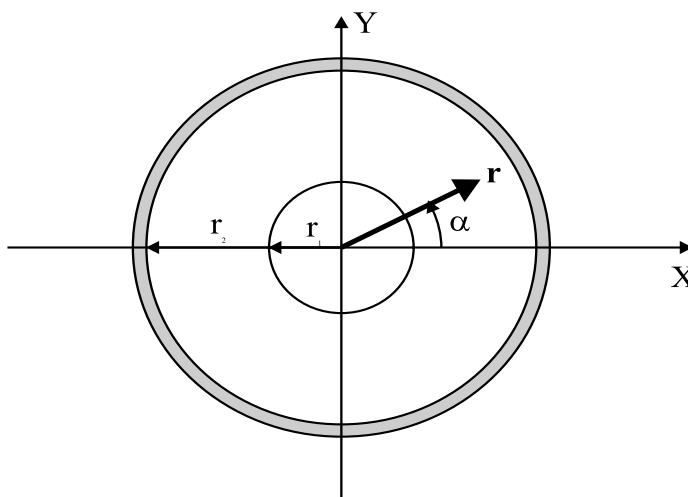


Рис. 2:

### Поле в кабеле.

Для описания структуры электрического поля для простоты будем считать, что кабель не обладает сопротивлением и не имеет потерь по длине кабеля. Это означает, что разность потенциалов между центральным проводником и оболочкой  $\Delta\varphi = const$  и радиальная составляющая вектора Умова-Пойнтинга в цилиндрической системе координат, связанной с осью кабеля, равна нулю. Отсутствие радиальной составляющей вектора плотности потока энергии означает, что проекция вектора напряженности электрического поля на ось кабеля  $E_z = 0$ . А в силу цилиндрической симметрии системы и  $E_\alpha = 0$ . Следовательно электрическое поле имеет отличную от нуля только радиальную составляющую, которая удовлетворяет уравнению:

$$\operatorname{div}(\epsilon \mathbf{E}) = \frac{\epsilon}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_r) = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид:  $E_r = A/r$  при этом константа  $A$  определяется разностью потенциалов между центральным проводником и оболочкой:

$$\Delta\varphi = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = A \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = A \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом напряженность электрического поля имеет только одну радиальную составляющую, равную:

$$E_r = \frac{\Delta\varphi}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r}.$$

### Плотность потока энергии.

С учетом структуры поля, вектор плотности потока энергии направлен вдоль оси кабеля и равен:

$$S_z = \frac{c}{4\pi} E_r B_\varphi = \frac{c}{4\pi} \frac{\Delta\varphi I}{\ln(R_2/R_1)} \frac{2}{cr^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\varphi I}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r^2}, \quad (21)$$

то есть энергия электромагнитного поля движется вдоль кабеля. Вне кабеля напряженность поля равна нулю, вследствие чего энергия вне кабеля отсутствует. На основании (21) выражение для полного потока энергии через поперечное сечение кабеля равно:

$$\int_S S_z d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta\varphi I}{\ln(R_2/R_1)} \frac{1}{r^2} r dr d\varphi = \Delta\varphi I = UI. \quad (22)$$

Известно, что потребляемая мощность  $P$  определяется выражением  $P = IU$ . Это означает, что вся энергия используемая потребителем, движется вдоль кабеля в пространстве между центральным проводником и оболочкой.

### Переменный ток.

Для переменного тока, при изменении направления тока на обратное, составляющие поля  $E_r$  и  $B_\varphi$  меняют знаки, а направление вектора плотности потока энергии не меняется. Поэтому и для переменного тока энергия в кабеле направлена к потребителю. Следует отметить, что для высокочастотного переменного тока частоты  $\omega$ , когда  $c/\omega$  имеет порядок расстояния между проводами, линия передачи начинает излучать электромагнитную энергию подобно антенне. Кроме того, при очень высоких частотах появляются существенные потери в изоляции проводников, что приводит к некоторым техническим ограничениям возможностей передачи энергии по проводникам. В связи с этим для передачи энергии на больших частотах обычные линии передач неприменимы и необходимо использовать устройства передачи энергии других типов, например волноводы.

## §6 Волноводы.

Волноводы представляют собой металлические трубки различной формы и сечения, обычно с неизменной по длине формой поперечного сечения. Теория распространения электромагнитного поля внутри волноводов основывается на системе уравнений Максвелла и на рассмотрении решений волновых уравнений. Однако вопрос о распространении волн в волноводах существенно отличается от вопроса распространения электромагнитного поля в неограниченном пространстве, так как для волноводов речь идет о распространении электромагнитных волн внутри ограниченного пространства или о решениях волновых уравнений со сложными граничными условиями.

### Прямоугольный волновод.

Рассмотрим для простоты прямоугольный волновод, стенки которого выполнены из идеального проводника. Пусть стороны прямоугольного сечения волновода равны  $a$

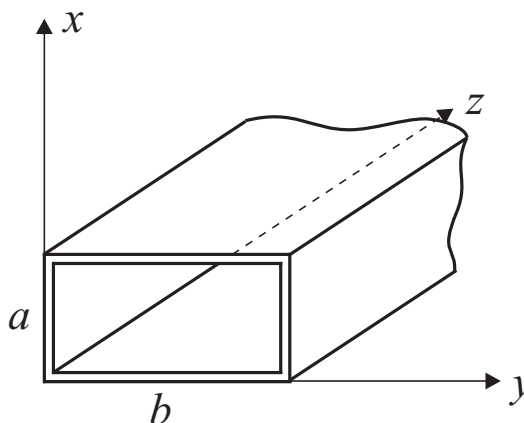


Рис. 3:

и  $b$ , соответственно. Направим ось  $Z$  по оси волновода (рис. 3). Так как рассматриваются волны, распространяющиеся вдоль оси волновода, то зависимость всех величин от времени  $t$  и координаты  $z$  естественно выбрать в виде:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = \mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}. \quad (23)$$

В результате, волновые уравнения  $\square \mathbf{E} = 0$ ,  $\square \mathbf{B} = 0$  в декартовой системе координат примут вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} = \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}; \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} = \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{B}. \quad (25)$$

Эти уравнения, совместно с уравнениями, связывающими электрическое и магнитное поле в волне  $\text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}/c$  — закон электромагнитной индукции,  $\text{rot } \mathbf{B} = \dot{\mathbf{E}}/c$  — обобщенный закон Ампера (точка над вектором обозначает производную по времени), позволяют найти электромагнитные волны, распространяющиеся в волноводе, при выполнении определенных граничных условий. Например, поле внутри идеального проводника равно нулю, а на внешней поверхности с нормалью  $\mathbf{n}$  поле равно  $\mathbf{E} = 4\pi\sigma$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда.

Из закона электромагнитной индукции и закона Ампера путем подстановки соотношений (23) можно выразить компоненты поля через  $E_z$  и  $B_z$ . Вычисления приводят к следующему результату:

$$E_x = \frac{1}{c^2 k_z^2 - \omega^2} \left( i c^2 k_z \frac{\partial E_z}{\partial x} + i \omega c \frac{\partial B_z}{\partial y} \right), \quad (26)$$

$$E_y = \frac{1}{c^2 k_z^2 - \omega^2} \left( i c^2 k_z \frac{\partial E_z}{\partial y} - i \omega c \frac{\partial B_z}{\partial x} \right), \quad (27)$$

$$B_x = \frac{1}{c^2 k_z^2 - \omega^2} \left( i c^2 k_z \frac{\partial B_z}{\partial x} - i \omega c \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (28)$$

$$B_y = \frac{1}{c^2 k_z^2 - \omega^2} \left( i c^2 k_z \frac{\partial B_z}{\partial y} + i \omega c \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \quad (29)$$

#### Типы волн в волноводе.

Если предположить, что в волноводе могут существовать поперечные волны, то есть  $E_z = B_z = 0$ , тогда из (24), (25) следует, что компоненты поля равны нулю, если  $c^2 k_z^2 \neq \omega^2$ . В случае же, если  $c^2 k_z^2 = \omega^2$ , как это имеет место для плоской монохроматической волны в неограниченном пространстве, то (25) приводит к двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y^2} = 0, \quad (30)$$

На стенках волновода магнитное поле, в силу граничных условий для идеального проводника направлено по касательной к стенкам волновода, а линии магнитного поля должны иметь характер замкнутых кривых. При этом линии поля не входят в идеальный проводник и, следовательно, не охватывают никаких токов. В поперечной волне продольная компонента плотности тока смещения также отсутствует, так что замкнутые магнитные линии не охватывают и токов смещения. Однако из теории электромагнитного поля известно, что линии магнитного поля, которые не охватывают никаких токов, существовать не могут. Следовательно, поперечные электромагнитные волны в волноводе распространять не могут в принципе.

Аналогичный результат следует и из анализа решений уравнения (30), так как для двумерного уравнения Лапласа доказано, что единственным решением такой краевой задачи является решение  $\mathbf{B} = 0$ . Если магнитное поле в волне отсутствует, то очевидно равно нулю и электрическое поле. Представленные здесь рассуждения относятся только к случаю, когда граница стенок волновода является замкнутой. В случае,

если граница незамкнута (например имеется щель в стенке волновода), то в таких волноводах возможно распространение поперечных электромагнитных волн.

Отсутствие в волноводах поперечных электромагнитных волн еще не означает, невозможности распространения в них электромагнитного поля. В волноводах могут образовываться продольные волны, которые не могут существовать в неограниченном пространстве. Продольными волнами называются волны, которые имеют отличную от нуля компоненту поля по оси волновода. Для продольных волн в волноводе общепринятой считается следующая их классификация:

1. поперечно-магнитные волны (ТМ-волны; transverse magnetic), определяемые требованиями:  $E_z \neq 0$ ,  $B_z = 0$ . Решения уравнений (24), (25) выражаются в этом случае только через  $E_z$ ;
2. поперечно-электрические волны (ТЕ-волны; transverse electric), определяемые требованиями:  $E_z = 0$ ,  $B_z \neq 0$ . Решения уравнений (24), (25) выражаются в этом случае только через  $B_z$ .

В открытых, несвязных волноводах существуют, также поперечные электромагнитные ТЕМ-волны, когда  $E_z = 0$ ,  $B_z = 0$ , и гибридные волны, когда  $E_z \neq 0$ ,  $B_z \neq 0$ . Однако этот случай здесь не рассматривается.

### Пример.

Рассмотрим для примера волны ТМ типа, тогда для  $E_z(x, y)$  получим уравнение:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = \left( k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z, \quad (31)$$

которое необходимо решить с учетом граничного условия  $E_z = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = a$  и  $y = 0$ ,  $y = b$ . Остальные компоненты легко определить на основании (26)–(29). Решение уравнения (31), удовлетворяющее сформулированным выше граничным условиям имеет вид:

$$E_z = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(\omega t - k_z z)},$$

где  $k_x = n\pi/a$ ,  $k_y = m\pi/b$ ,  $n, m$  - любые целые числа не равные нулю. Как видно решение имеет вид бегущей волны в направлении оси волновода и стоячей волны в ортогональной оси волновода плоскости. В соответствии с уравнением (31) эти числа связаны общим соотношением:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} - \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}. \quad (32)$$

### Граничная частота.

Из последнего равенства видно, что величина  $k_z$  является вещественной только при выполнении следующего условия:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \geq \frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}.$$

и в этом случае действительно вдоль оси волновода распространяется электромагнитная волна. Если это условие не выполняется, то  $k_z$  становится мнимой величиной и в соответствии с решением для  $E_z$  получим экспоненциальное затухание поля по оси волновода. Таким образом, через прямоугольный волновод могут проходить волны только с частотой больше критической частоты  $\omega_0$ :

$$\omega_0 = c \sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{a^2} + \frac{m^2 \pi^2}{b^2}}.$$

Аналогично решается задача для определения поля и условий распространения ТЕ - волны. В этом случае также возникает понятие граничной частоты, ниже которой волны в волноводе не распространяются. Эта частота совпадает с  $\omega_0$

## §7 Дифракция.

Электромагнитная волна, распространяясь в пространстве встречает различные препятствия, с которыми происходит ее взаимодействие. При различных соотношениях длины волны, геометрических размеров и форм препятствия взаимодействие может выразиться в процессах отражения, преломления, прохождения, рассеяния, поглощения, огибания и т.д. В общем случае взаимодействие препятствия и электромагнитной волны состоит в рассеянии электромагнитной волны препятствием. Задачей теории дифракции является изучение явления огибания препятствий электромагнитными волнами и рассеяние волн на геометрических объектах (препятствиях).

### Тождество Грина.

Для описания явления дифракции электромагнитного поля воспользуемся хорошо известным тождеством Грина (которое легко получить из теоремы Остроградского-Гаусса выбрав в качестве вектора интегрирования вектор  $\mathbf{a} = \varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi$ )

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dv = - \oint_S (\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}) ds. \quad (33)$$

Здесь  $\partial/\partial n$  означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к поверхности  $S$ , ограничивающий объем  $V$ . Обычно теорема Грина формулируется для внешней нормали, но в теории дифракции удобнее рассматривать дифференцирование именно вдоль внутренней нормали. Функции  $\varphi$  и  $\psi$  в теореме Грина - произвольные дважды дифференцируемые функции. Пусть функция  $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяет волновому уравнению:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = -f(\mathbf{r}, t). \quad (34)$$

В качестве функции  $\psi$  выберем функцию Грина неоднородного волнового уравнения  $G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \quad (35)$$

### Функция Грина.

Как следует из уравнения (35) функция Грина волнового уравнения зависит только от разности координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \equiv \mathbf{R}$  и времени  $t - t' \equiv \tau$ . Для нахождения явного вида функции Грина представим ее в виде интеграла Фурье:

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int G(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - i\omega\tau} d\mathbf{k} d\omega,$$

где  $G(\mathbf{k}, \omega)$  - Фурье образ функции Грина. Соответственно для дельта-функций Дирака имеем:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - i\omega\tau} d\mathbf{k} d\omega.$$

Подставляя данные выражения в (35), для  $G(\mathbf{k}, \omega)$  получим:

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \omega^2/c^2}.$$

В результате функция Грина волнового уравнения может быть представлена в виде:

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = -\frac{c^2}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - i\omega\tau)}{(\omega - kc)(\omega + kc)}. \quad (36)$$

### Запаздывающая функция Грина.

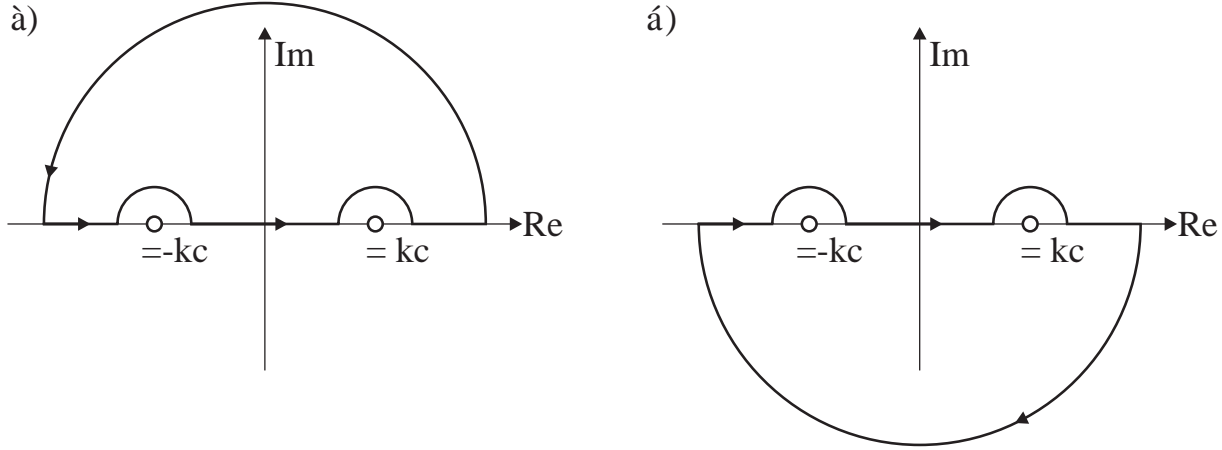


Рис. 4:

Как видно данное решение является сингулярной функцией, так как при интегрировании по  $\omega$  в точках  $\omega = \pm kc$  имеются два полюса. Правила обращения с сингулярными функциями не вытекают только из математических определений. В общей теории сингулярных функций, связанных с волновым уравнением имеется несколько определений типов решений для функции Грина. Один из типов таких решений приводит к определению функции Грина, которая генерирует запаздывающие решения неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющая физическому принципу причинности. Принцип причинности требует, чтобы возмущение пришедшее в некоторую точку от источника возмущения приходило позднее, чем оно было создано в источнике. Такая функция Грина называется запаздывающей функцией Грина волнового уравнения  $G^{ret}$ . Запаздывающая функция Грина определяется как решение, равное нулю при условии  $t - t' = \tau < 0$ , то есть  $G^{ret}(\mathbf{r}, t < t'; \mathbf{r}', t') = 0$ . Для выполнения этого условия необходимо рассматривать интегрирование в (36) в комплексной плоскости  $\omega$ . Учитывая, что знак мнимой экспоненты при  $\omega$  отрицателен ясно, что для равенства нулю интеграла (36) при  $\tau < 0$  необходимо обойти полюса сверху и замкнуть контур интегрирования в верхней полуплоскости  $\omega$ . При этом внутри контура полюсов нет и интеграл оказывается равным нулю (рис. 4.а).

При  $\tau > 0$  контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости и внутри контура оказываются два полюса (рис. 4.б). На основании теоремы о вычетах, интеграл в этом случае равен сумме вычетов в обоих полюсах, в результате:

$$G^{ret}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{c}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \sin(kc\tau) \frac{d\mathbf{k}}{k} = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(\tau - R/c)}{R}. \quad (37)$$

Здесь  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ ,  $\tau = t - t' > 0$ , а при  $\tau < 0$   $G^{ret} = 0$ .

### Интеграл Кирхгофа.

Подставим выражения (34) и (35) в тождество Грина (33) и для сокращения записи условимся обозначать набор пространственных переменных и времени одним символом:  $\mathbf{r}, t \equiv x$ ,  $\mathbf{r}', t' \equiv x'$ . В результате:

$$\begin{aligned} & \int_V \left\{ \varphi(x') \left[ -\delta(x - x') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial t'^2} \right] - G(x, x') \left[ -f(x') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(x')}{\partial t'^2} \right] \right\} dv' = \\ & = - \oint_S \left[ \varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'} \right] ds' \end{aligned} \quad (38)$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (38) по  $t'$  от  $t_0$  до  $t_1 > t$ , получим:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_V \left\{ \varphi(x') \left[ -\delta(x - x') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial t'^2} \right] - G(x, x') \left[ -f(x') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(x')}{\partial t'^2} \right] \right\} dv' dt' =$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \oint_S \left[ \varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'} \right] ds' dt'. \quad (39)$$

Слагаемые, содержащие вторые производные по времени в (39) можно преобразовать тождественно следующим образом:

$$\varphi(x') \frac{\partial^2 G(x, x')}{\partial t'^2} - G(x, x') \frac{\partial^2 \varphi(x')}{\partial t'^2} = \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial t'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial t'} \right]$$

Выполняя очевидные интегрирования в (39) получим:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V G(x, x') f(x') dv' dt' + \frac{1}{c^2} \int_V \left[ \varphi \frac{\partial G(x, x')}{\partial t'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right] \Big|_{t_0}^{t_1} dv' + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \oint_S \left[ \varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'} \right] ds' dt'. \end{aligned}$$

Выберем в качестве функции Грина волнового уравнения запаздывающую функцию Грина. Так, как по определению в вычисленном интеграле по времени  $t_1 > t$ , следовательно  $G = 0$  и в полученном равенстве остаются только слагаемые на нижнем пределе интегрирования по времени во втором интеграле правой части равенства. В результате:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V G(x, x') f(x') dv' dt' + \frac{1}{c^2} \int_V \left[ G(x, x') \frac{\partial \varphi}{\partial t'} - \varphi \frac{\partial G(x, x')}{\partial t'} \right] \Big|_{t'=t_0} dv' + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \oint_S \left[ \varphi(x') \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'} - G(x, x') \frac{\partial \varphi(x')}{\partial n'} \right] ds' dt'. \end{aligned}$$

Предположим, что внутри рассматриваемого объема нет источников ( $f = 0$ ) и кроме того в начальный момент времени  $\varphi = 0$  и  $\partial \varphi / \partial t' = 0$ , то есть все поле внутри объема создается за счет возмущения, образующегося на границе. В этом случае поле внутри объема будет определяться выражением:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S \left[ \varphi(\mathbf{r}', t') \frac{\partial G^{ret}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{\partial n'} - G^{ret}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}', t')}{\partial n'} \right] ds'.$$

В данном выражении  $\frac{\partial}{\partial n'} = \mathbf{n}' \cdot \text{grad}'$ , где  $\mathbf{n}'$  — единичный вектор внутренней нормали к поверхности  $S$ . Подставим явное выражение запаздывающей функции Грина для волнового уравнения (37). Вычисление производной от  $G^{ret}$  по направлению нормали приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{ret}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{\partial n'} ds' &= \text{grad}' G^{ret} \cdot \mathbf{n}' ds' = \text{grad}' G^{ret} \cdot d\mathbf{s}'. \\ \text{grad}' G^{ret} &= \frac{\partial G^{ret}}{\partial R} \text{grad}' R = -\frac{1}{4\pi R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(\tau - R/c)}{R} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi R} \left[ -\frac{\delta(\tau - R/c)}{R^2} - \frac{\dot{\delta}(\tau - R/c)}{cR} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, при интегрировании по  $t'$  получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \oint_{t_0}^{t_1} dt' \int_S \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - t' - R/c)}{R} \text{grad}' \varphi(\mathbf{r}', t') + \right.$$



$$+\varphi(\mathbf{r}', t') \frac{1}{4\pi R} \left[ -\frac{\delta(t-t'-R/c)}{R^2} - \frac{\delta(t-t'-R/c)}{cR} \right] \} ds'.$$

И окончательно:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{\text{grad}' \varphi(\mathbf{r}', t')}{R} - \frac{\mathbf{R}}{R^3} \varphi(\mathbf{r}', t') - \frac{\mathbf{R}}{cR^2} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \right] ds', \quad (40)$$

где  $t' \equiv t - R/c$

Такой интеграл называется интегралом Кирхгофа. Функция  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ , входящая в него, не является решением задачи на определение поля, потому что значения  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n'$  на поверхности  $S$  не произвольны, а находятся из решения краевой задачи. Однако, если они известны, то интеграл Кирхгофа дает выражение  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  в любой точке объема.

Если все величины поля зависят от времени периодически  $\exp(i\omega t)$ , то этот временной множитель в интеграле Кирхгофа после подстановки  $t' = t - R/c$  сократится и для величин, зависящих только от координат, получим:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{e^{-ikR}}{R} \left[ \text{grad}' \varphi(\mathbf{r}') - \frac{\mathbf{R}}{R^2} \varphi(\mathbf{r}') - ik \frac{\mathbf{R}}{R} \varphi(\mathbf{r}') \right] ds', \quad (41)$$

где  $k = \omega/c$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ .

#### Условие излучения.

Во многих случаях источник рассеянных электромагнитных волн находится в ограниченной области. Расходящаяся волна на больших расстояниях от области рассеяния имеет вид:

$$\varphi \sim \frac{e^{-ikR}}{R}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial R} \sim -\varphi \left( ik + \frac{1}{R} \right) \quad (42)$$

Требование такой зависимости называется условием излучения.

Замкнутую поверхность для монохроматического излучения в формуле (41) выбирают с учетом особенностей рассматриваемой задачи. Чаще всего рассматриваются задачи при наличии экрана с отверстиями или рассеивающего предмета, т.е. можно считать, что поверхность  $S$  состоит из двух частей. Область источника  $A$  от области наблюдения  $B$  отделена поверхностью  $S_1$ .

Отверстия в экране расположены в конечной части  $S_1$ , и поэтому можно считать, что от них распространяется расходящаяся волна в области  $B$ , которая удовлетворяет условиям излучения. Т.е. при удалении  $S_2$  на бесконечность интеграл (41) по ней равен нулю. Поэтому весь интеграл сводится к интегралу по  $S_1$ , т.е. к интегралу по отверстиям.

В втором случае, при наличии рассеивающего предмета, интеграл по  $S_2$  из-за условий излучения также стремится к нулю, и остается лишь часть по  $S_1$ .

Поэтому выражение для монохроматического излучения (41) можно переписать в виде:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{e^{-ikR}}{R} \left[ \frac{\mathbf{R}}{R} \varphi \left( ik + \frac{1}{R} \right) - \text{grad}' \varphi \right] ds', \quad (43)$$

причем  $ds$  считается направленным в область  $B$  (изменены знак и направление нормали).

#### Приближение Кирхгофа.

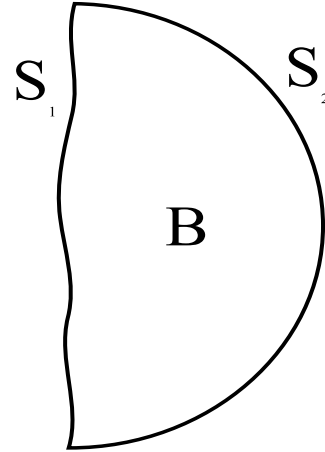


Рис. 5:

Так как величины  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n'$  на поверхности не могут задаваться произвольно, а должны быть найдены из решения краевой задачи, то правая часть уравнения (43) неизвестна. Поэтому задачи теории дифракции решают в приближении Кирхгофа, которое состоит в следующих двух допущениях:

1.  $\varphi = 0$ ;  $\partial\varphi/\partial n' = 0$  на непроницаемых частях экрана;
2.  $\varphi$  и  $\partial\varphi/\partial n'$  равны их значениям в падающей волне при отсутствии экранов или препятствий.

В областях оптических длин волн можно считать  $k \gg 1/R$ . Имея в виду, что  $|\text{grad}' \varphi| \sim k\varphi$ , и пренебрегая членами  $1/R$ , можно привести (43) к виду:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_1} \frac{e^{-ikR}}{R} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \varphi ik - \text{grad}' \varphi \right) ds. \quad (44)$$

Такое приближение называется **оптическим**.

## §8 Дифракция Френеля.

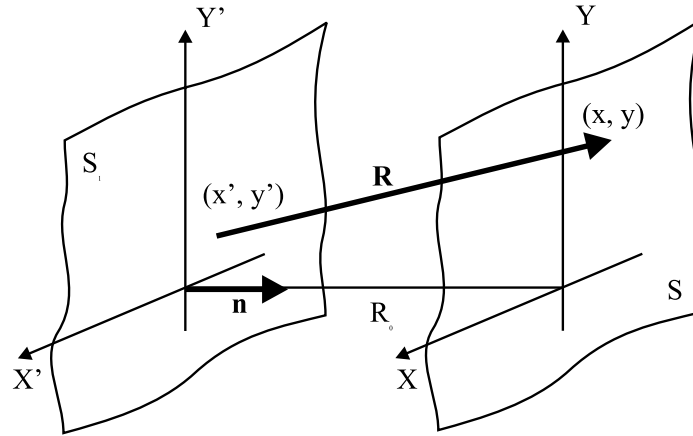


Рис. 6:

Дифракцией Френеля называется такая дифракция, при которой экран освещается пучком параллельных лучей, а плоскость изображений расположена не очень далеко от плоскости экрана. В этом случае  $\text{grad}' \varphi = -\mathbf{n}\varphi ik$  и (44) принимает вид:

$$\varphi(x, y) = \frac{ik}{4\pi} \int_{S_1} \frac{e^{-ikR}}{R} \psi(x', y') [\cos(\widehat{\mathbf{R}, \mathbf{n}}) + 1] dx' dy', \quad (45)$$

где  $(\widehat{\mathbf{R}, \mathbf{n}})$  — угол между  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{n}$ , причем  $\mathbf{R}$  — вектор, направленный из  $(x', y')$  в  $(x, y)$ ;  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к  $S_1$ , направленный в сторону плоскости изображения  $S$ . Если воспользоваться малостью углов отклонения, а именно  $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \ll R_0$ , то получим:

$$\cos(\widehat{\mathbf{R}, \mathbf{n}}) \approx 1;$$

$$R = \sqrt{R_0^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2} \approx R_0 + \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2R_0},$$

и при подстановке в (45) получим окончательно:

$$\varphi(x, y) = \frac{ik}{2\pi} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \int_{S_1} \psi(x', y') \exp \left\{ \frac{-ik[(x-x')^2 + (y-y')^2]}{2R_0} \right\} dx' dy' \quad (46)$$

## §9 Дифракция Фраунгофера.

В дифракции Фраунгофера предполагается, что размеры объекта много меньше расстояния до источника освещения и расстояния до плоскости наблюдения (или предполагается, что источник и наблюдатель находятся в бесконечности). При этих условиях можно считать, что  $\cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{R}})$  меняется незначительно и равен  $\cos \alpha$ , а

$$R = \sqrt{R_0^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \approx \sqrt{R_0^2 + x^2 + y^2 - 2(xx' + yy')} \approx \\ \approx r_0 - \frac{x}{r_0}x' - \frac{y}{r_0}y',$$

где  $r_0 = \sqrt{R_0^2 + x^2 + y^2}$ ,  $|x'| \ll |x|$ ,  $|y'| \ll |y|$ .

Для фиксированного значения  $(x, y)$   $r_0$  меняется незначительно и может считаться константой. Поэтому в указанном приближении получим:

$$\varphi(\xi, \eta) = A \int_{S_1} \psi(x', y') e^{ik(\xi x' + \eta y')} dx' dy', \quad (47)$$

$$\xi = \frac{x}{r_0}, \quad \eta = \frac{y}{r_0}, \quad A = \frac{ik}{4\pi} (1 + \cos \alpha) \frac{e^{-ikr_0}}{r_0}.$$

Причем этот интеграл имеет вид интеграла Фурье, что делает его математически выгодным.

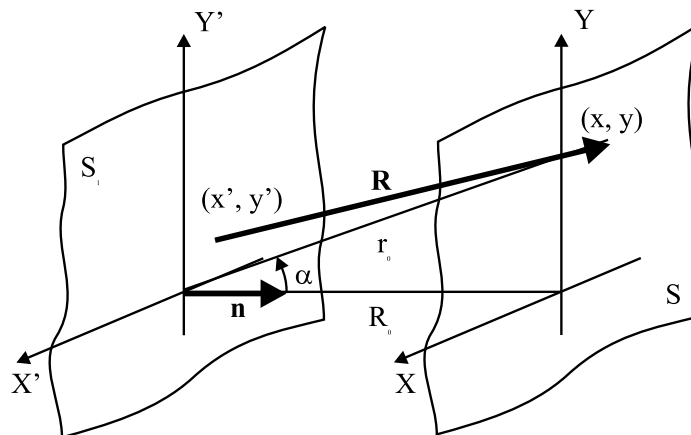


Рис. 7:

# Литература

- [1] *С.Р.де Гроот, Л.Г.Сатторп.* Электродинамика. М., Наука, 1982.
- [2] *А.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов.* Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М., Наука, 1978.
- [3] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Гидродинамика. М., Наука, 1986.
- [4] *В.Г.Левич.* Курс теоретической физики. Том 1 М., Наука, 1969.
- [5] *В. Карцев.* Приключения великих уравнений. М., Знание, 1986, 288 с.
- [6] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. т.6. М., Мир, 1966, 343с.
- [7] *Джексон.* Классическая электродинамика.
- [8] *Градитейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.
- [9] *Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский.* Квантовая теория волнового момента. Ленинград, Наука, 1975.
- [10] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.
- [11] *М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин.* Классическая электродинамика. М., Наука, 1988.

# Оглавление

§1	Электромагнитные волны в вакууме . . . . .	1
§2	Рассеяние электромагнитных волн . . . . .	3
§3	Электромагнитные волны в однородных изотропных средах . . . . .	5
§4	Отражение и преломление плоской волны . . . . .	6
§5	Распространение энергии электромагнитного поля вдоль линий передач. . . . .	9
§6	Волноводы. . . . .	11
§7	Дифракция. . . . .	14
§8	Дифракция Френеля. . . . .	18
§9	Дифракция Фраунгофера. . . . .	19