

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Воронежский государственный университет

Физический факультет

Кафедра теоретической физики

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА.
Специальная теория относительности

Для студентов 3 курса физического факультета
спец. 010400, 071500, 200200

Составитель:
проф. Запрягаев С.А.

ВОРОНЕЖ 2000

1 ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1.1 Введение

В 60-х годах XIX века Максвеллом была сформулирована система уравнений для описания электромагнитного поля, которая в системе единиц Гаусса имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho; & \operatorname{div} \vec{B} &= 0; & \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0; \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\vec{E}$ - напряженность электрического поля, $\vec{B}$ - вектор индукции магнитного поля, ρ - объемная плотность заряда, $\vec{j}$ - плотность тока. Справедливость системы уравнений (1.1) была подтверждена экспериментально Герцем в 80-х годах прошлого столетия. Начиная с этого времени, система (1.1) подвергалась систематическому анализу и осмысливанию. При этом, под влиянием успехов классической механики Ньютона, “испытание” системы уравнений Максвелла проводилось на ее согласованность утвердившимся к тому времени принципам и делались попытки “механистического” толкования физических результатов в теории электромагнитного поля [2]. Так возникло понятие эфира, как механической “среды”, в которой распространяются электромагнитные волны. Более того, Лоренц фактически отождествил понятие эфира с абсолютным пространством Ньютона. В дальнейшем, однако, выяснилась необходимость постулирования противоречивых свойств эфира. Например, для объяснения аберрации необходимо было считать, что эфир не увлекается средой [3], для объяснения опытов Физо по измерению скорости света в движущейся жидкости необходимо было положить, что эфир увлекается средой частично [3], и, наконец, для объяснения опытов Майкельсона-Морли требовалось считать, что эфир полностью увлекается средой. Все это и привело к необходимости построения теории, которая бы непротиворечиво ответила на все вопросы, вытекающие из системы уравнений Максвелла. Этой теорией явилась созданная Эйнштейном специальная теория относительности (СТО). Прежде чем приступить к изучению СТО полезно разобрать ответы на следующие вопросы:

1. Инвариантна ли система уравнений Максвелла относительно преобразований Галилея? Напомним, что если системы в начальный момент времени совпадали, а в дальнейшем двигались вдоль осей X , X' с относительной скоростью v (рис. 1), преобразования Галилея имеют вид:

$$x = x' + vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'. \quad (1.2)$$

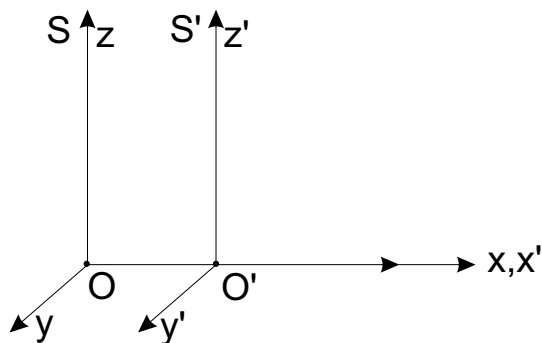


Рис. 1.

2. Какими экспериментами подтверждается конечность скорости распространения света c ? Предложите метод измерения c . За какое время свет преодолеет расстояние 1 км? От Луны до Земли? От центра Галактики до Земли?

3. Почему из “корпускулярного” объяснения явления абберации

звезд следует, что эфир не увлекается веществом?

4. Как согласуются опыты Физо и Майкельсона-Морли с понятием эфира?

1.2 Постулаты Эйнштейна. Преобразования Лоренца.

Следующие два утверждения лежат в основе СТО (Эйнштейн):

1. Специальный принцип относительности. *При равных условиях все явления протекают одинаково в инерциальных системах отсчета.*

2. Принцип постоянства скорости света. *Во всех инерциальных системах скорость света имеет одно и то же значение c .*

В данных постулатах следует обратить внимание не такие первичные понятия как система отсчета и инерциальная система отсчета. Вообще понятие “система отсчета” есть идеализация понятия об абсолютно твердом теле, состоящем из “опорных точек” с постоянными расстояниями. Инерциальная система отсчета – это такая система “опорных точек”, в которой материальная точка, не взаимодействующая с другими телами, движется равномерно и прямолинейно или покоится. В СТО за инерциальной системой отсчета закрепляется более широкое понятие. А именно, в пределах каждой инерциальной системы устанавливается свое

единое время (синхронизация часов), которое является ее “внутренним” свойством. В результате за каждой точкой пространства “закрепляется” 4 величины: три пространственные координаты x, y, z и время t . В соответствии с этой идеологией данной “точке” в другой инерциальной системе соответствуют свои 4 величины x', y', z', t' . Традиционно такие инерциальные системы называют еще Лоренцевыми.

Таким образом, в СТО играют важную роль понятия “пространство” и “время” – категории, обозначающие основные формы существования материи. При этом “пространство” – выражает порядок существования отдельных объектов, а “время” – порядок смены явлений. Свойства пространства и времени делят на метрические (протяженность, длительность) и топологические (размерность, непрерывность, связанность, порядок и направление времени). Теорией метрических свойств пространства и времени является теория относительности (СТО и общая теория относительности). Исследования топологических свойств развиваются лишь в последнее время и не приняли еще общезначимого значения. Необходимо также подчеркнуть, что понятию свободное пространство приписываются свойства однородности и изотропности, а времени – свойство однородности.

Из постулатов СТО следует, что если две системы S и S' расположены и движутся, как указано на рис. 1 и в момент времени $t = t' = 0$ их начала отсчета *совпали*, то связь пространственно-временных координат этих систем определяется выражениями (формулы преобразований Лоренца):

$$x = \Gamma(v)(x' + vt'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \Gamma(v)(t' + \frac{v}{c^2}x'), \quad (1.3)$$

$\Gamma(v) = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Обратные преобразования к (1.3) имеют вид

$$x' = \Gamma(v)(x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \Gamma(v)(t - \frac{v}{c^2}x). \quad (1.4)$$

Пример 1.1. *Вывести формулы преобразований Лоренца, исходя из принципа постоянства скорости света.*

Рассмотрим системы отсчета S и S' (рис. 1). Пусть в начале координат в момент времени $t = t' = 0$ происходит вспышка света. Рассмотрим данное событие с точки зрения наблюдателя в S . Для $t > 0$ свет распространяется в виде сферической волны с центром в т.. К моменту t фронт волны доходит

до точки с координатами x, y, z . Следовательно, имеет место соотношение:

$$s_1^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \quad (1.5)$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в S' , по принципу постоянства скорости света:

$$s_2'^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \quad (1.6)$$

Так как равенства (1.5) и (1.6) выполняются одновременно, координаты x, y, z, t связаны с координатами x', y', z', t' . Из однородности пространства-времени следует, что x', y', z', t' выражаются линейными соотношениями через x, y, z, t . При этом, т.к. плоскости XY и $X'Y'$, XZ и $X'Z'$ преобразуются в себя, то из условия $z = 0$ следует, что $z' = 0$ (а из $y = 0$ следует, что $y' = 0$) независимо от x и t . Поэтому:

$$y' = \kappa(v)y; \quad z' = \kappa(v)z, \quad (1.7)$$

где κ независимый от x, y, z, t коэффициент, который из-за изотропии пространства может быть только функцией v (поэтому же коэффициенты при y и z одинаковы). Так как с точки зрения наблюдателя в S' система S удаляется со скоростью $-v$ имеем:

$$y = \kappa(-v)y'; \quad z = \kappa(-v)z'. \quad (1.8)$$

Т.к. координаты y и z поперечные, их преобразование не должно зависеть от направления v , поэтому $\kappa(v) = \kappa(-v)$. Тогда из формул (1.7) и (1.8) вытекает, что $\kappa^2 = 1$, т.е. $\kappa = \pm 1$. Так как в пределе $v \rightarrow 0, y' \rightarrow y, z' \rightarrow z$, окончательно находим $\kappa = 1$ и, следовательно:

$$y = y', \quad z = z'. \quad (1.9)$$

Аналогично из линейности связи координат и эквивалентности систем отсчета S и S' вытекает, что при $s_1^2 \neq 0$ имеют место соотношения $s_2'^2 = \alpha(V)s_1^2, s_1^2 = \alpha(v)s_2'^2$. Таким образом, с учетом (1.6), (1.7), (1.9) получаем:

$$c^2 t^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2. \quad (1.10)$$

Примем теперь, что

$$x' = ax + bt, \quad t' = fx + gt, \quad (1.11)$$

где коэффициенты a, b, f, g зависят только от v . Так как в системе S' положение точки $O'(x' = 0, y' = 0, z' = 0)$ определяется уравнениями

$0 = ax + bt$, $y = 0$, $z = 0$, т.е. $x = -(b/a)t$ и $-b/a = v$, то, подставляя (1.11) в (1.10), находим коэффициенты a, b, f, g . Явные выражения для коэффициентов имеют следующий вид:

$$a = \pm\Gamma; \quad b = \pm(-v\Gamma); \quad g = \pm\Gamma; \quad f = \pm(-v/c^2)\Gamma.$$

Ввиду предельного перехода $x' \rightarrow x$, $t' \rightarrow t$ при $v \rightarrow 0$ необходимо выбрать положительные знаки, что приводит к (1.4) и (1.3).

1.3 Основные следствия из преобразований Лоренца.

Некоторые следствия, вытекающие из преобразований Лоренца, традиционно принято считать основными. Это: 1) относительность одновременности; 2) сокращение длины движущегося масштаба; 3) замедление хода движущихся часов; 4) закон сложения скоростей. Последнее следствие означает, что если в системе отсчета S' точка совершает движение $x' = x'(t')$, $y' = y'(t')$, $z' = z'(t')$, и проекции ее скорости в S' есть:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}, \quad (1.12)$$

то проекции скорости этой частицы в системе S равны:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2}; \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2}; \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + u'_x v/c^2}; \quad (1.13)$$

Другие заключения в рамках СТО также являются следствиями из преобразований Лоренца, но в первую очередь необходимо обратить внимание на перечисленные выше.

Пример 1.2. Метровая линейка ($l_0 = 100$) движется относительно наблюдателя со скоростью $v = 0.6c$, направленной вдоль линейки. Какую длину l линейки измерит наблюдатель?

На основании (1.4) $x'_2 - x'_1 = \Gamma(v) [(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]$. Так как процесс измерения длины движущегося объекта состоит в одновременной фиксации начала и конца объекта по часам системы координат в которой проводится измерение, $t_2 - t_1 = 0$. И так как, по определению $x_2 - x_1 = l$ и $x'_2 - x'_1 = l_0$ находим: $l = l_0 \sqrt{1 - 0.6^2} = 80\text{см}$.

Пример 1.3. Псион имеет период полураспада $\sim 1.8 \cdot 10^{-8}$ сек. Если пучок пионов движется со скоростью $v = 0.99c$, то: а) во сколько

раз увеличится время жизни пиона, измеренное в лабораторной системе? б) за какое время половина пионов из пучка распадется? в) как далеко они пролетят за это время?

Так как $\Gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - 0.99^2} \simeq 7.09$, период полураспада увеличится в 7.09 раз и станет равным $\tau = 12.7 \cdot 10^{-8}$. Соответственно за это время пионы пройдут путь $x = v\tau = 0.99c \cdot 12.7 \cdot 10^{-8} = 37.9$.

Пример 1.4. В оба конца 20-ти метрового вагона, движущегося со скоростью 200 км/час одновременно, с точки зрения наблюдателя на Земле, ударяют молнии. Какую разницу во времени между ударами молний зафиксируют пассажиры вагона?

Пусть x_1t_1 и x_2t_2 - пространственно-временные координаты начала и конца вагона в системе координат, связанной с Землей. Соответственно $x'_1t'_1$ и $x'_2t'_2$ - пространственно-временные координаты тех же точек в системе, связанной с вагоном. На основании (1.3) имеем:

$$t_1 = \Gamma(v)(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1), \quad t_2 = \Gamma(v)(t'_2 + \frac{v}{c^2}x'_2),$$

где v - скорость движения вагона относительно Земли. В результате: $t_1 - t_2 = \Gamma(v)[t'_1 - t'_2 + v(x'_1 - x'_2)/c^2]$. По условию задачи $t_1 = t_2$, а $x'_1 - x'_2 = l$ длина вагона. Таким образом: $t'_1 - t'_2 = -vl/c^2 \simeq -1.24 \cdot 10^{-14}$. Знак “-” указывает на то, что $t'_1 < t'_2$, т.е., с точки зрения пассажиров поезда, сначала молния ударяет в начало вагона, а затем через $\sim 1.24 \cdot 10^{-14}$ сек в конец вагона.

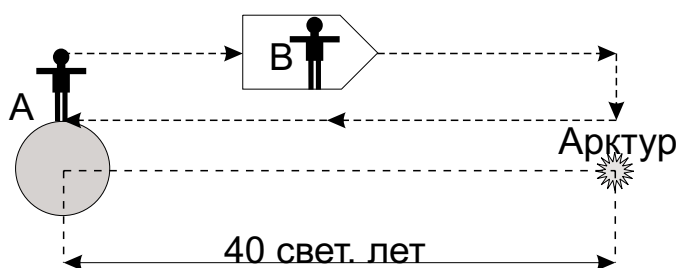


Рис. 2.

Пример 1.5. Близнец В совершает путешествие к звезде Арктур и обратно со скоростью $v = 0.99$. Каким будет возраст каждого из близнецов по окончании путешествия, если до

начала им было по 20 лет? С точки зрения наблюдателя А (см. рис.2) ракета пролетает 80 световых лет со скоростью 0.99, т.е. промежуток времени от начала до конца путешествия составит $\Delta t = 80 / 0.99 \simeq 80.8$. Поэтому возраст А будет $20 + 80.8 = 100.8$ лет. Кроме того близнец А считает, что часы в ракете идут в $\sqrt{1 - 0.99^2} = 0.141$ раз медленнее, чем на Земле, поэтому для В время путешествия составит лишь $80.8 \cdot 0.141 = 11.4$

года и В по окончании путешествия будет $20 + 11.4 = 31.4$ года и он окажется моложе А на 69.4 лет! Если рассуждать с точки зрения В, то по его измерениям расстояние от Земли до Арктура равно $40\sqrt{1 - 0.99^2} \simeq 5.64$ световых лет. Так как Земля удаляется от него со скоростью $0.99c$, то он достигнет Арктура через $\Delta t = 5.64 / 0.99 \simeq 5.7$, а все путешествие по его расчетам займет 11.4 лет, что совпадает с результатом, полученным А. Если теперь рассчитать возраст А с точки зрения В, то получится, что А к концу путешествия станет моложе В. Это и есть парадокс близнецов. Данный парадокс устраняется, если заметить, что А всегда остается в одной инерциальной системе, тогда как В, поворачивая обратно, изменяет ее. Поэтому решение задачи с точки зрения А верно, а с точки зрения В нет.

Пример 1.6. Часы на пружине совершают колебательное движение вдоль оси X (при $t = 0$; $x = x_0$, $t' = 0$) с частотой ω . Каково будет различие в показаниях данных часов с неподвижными часами (расположенными в начале координат) через один период?

Если часы совершают неравномерное движение вдоль оси X по закону $x = f(t)$, то можно рассуждать следующим образом. Пусть Δt достаточно мало, тогда от t до $t + \Delta t$ часы движутся с постоянной скоростью $v = \dot{f}(t)$. Следовательно, интервал времени от t до $t + \Delta t$ по покоящимся часам связан с интервалом времени от t' до $t' + \Delta t'$ по движущимся часам соотношением: $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \dot{f}^2/c^2}$. В результате, подставляя $f(t) = x_0 \cos \omega t$, для конечных интервалов времени находим:

$$t' = \int_0^t \sqrt{1 - \dot{f}^2(\tau)/c^2} d\tau = \int_0^t \sqrt{1 - (x_0 \omega / c)^2 \sin^2(\omega \tau)} d\tau, \quad (1.14)$$

или $t' = E(\omega t; \omega x_0 / c) / \omega$, где $E(\varphi; r)$ - эллиптический интеграл второго рода. Таким образом, разность хода часов за один период составит $\Delta t = T - E(2\pi; \omega x_0 / c) / \omega$.

Пример 1.7. Объяснить явление абберации света в рамках СТО.

Явление абберации света можно рассматривать как проявление относительности понятия “угол”. Пусть в плоскости X, Y в системе координат S движется частица со скоростью U (рис. 3). В соответствии с рисунком имеем: $U_y = U \cos \alpha$, $U_x = U \sin \alpha$. Аналогично в другой инерциальной системе S' мы должны записать $U'_y = U' \cos \alpha'$,

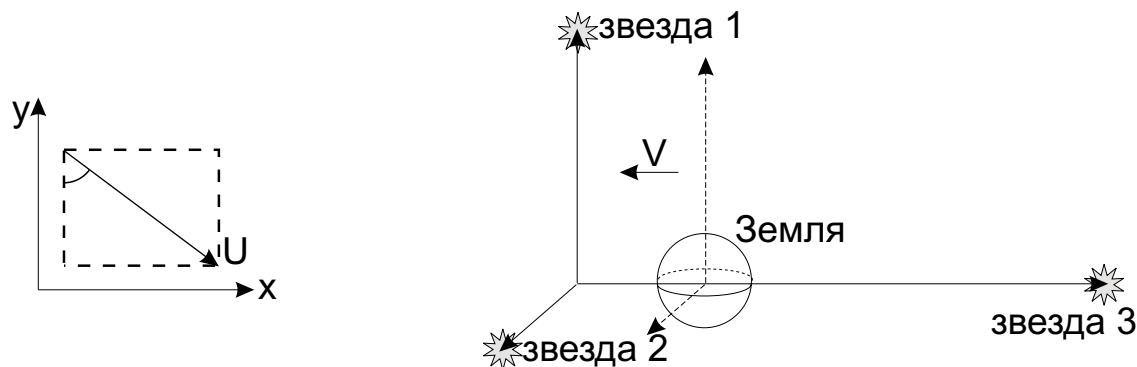


Рис. 3.

$U'_x = U' \sin \alpha'$. Так как по определению $\operatorname{tg} \alpha = U_x/U_y$, то на основании (1.13) получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_x}{U_y} = \frac{U'_x + v}{1 + \frac{U'_x v}{c^2}} \cdot \frac{1 + \frac{U'_x v}{c^2}}{U'_y} \Gamma(v) = \frac{U' \sin \alpha' + v}{U' \cos \alpha'} \Gamma(v) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (1.15)$$

Равенство (1.15) как раз и демонстрирует тот факт, что величина угла зависит от того, из какой системы отсчета угол измеряется.

Для объяснения аберрации рассмотрим систему координат, связанную с “неподвижными” звездами (рис. 3). Тогда, с точки зрения наблюдателя на Земле, эта система движется со скоростью v (движение Земли относительно неподвижных звезд). Предполагая, что свет – это поток частиц (фотонов), можно использовать (1.15) для случая $\alpha' = 0, U' = c$. В результате:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \simeq \frac{v}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) \simeq \frac{v}{c}.$$

Это и есть величина угла аберрации.



Рис. 4.

Пример 1.8. Объяснить опыты Физо по измерению скорости света в движущейся жидкости, исходя из принципов СТО.

Экспериментально установлено, что скорость распространения электромагнитного излучения в покоящейся среде

с показателем преломления n равна c/n . Поэтому скорость света в движущейся жидкости может быть вычислена на основании закона сложения скоростей (1.13). Пусть система S' связана с движущейся жидкостью (т.е. $U'_x = c/n$), а v - скорость движения жидкости (рис. 4), тогда скорость света, измеренная из лабораторной системы координат, есть:

$$U_x = \frac{c/n \pm v}{1 \pm cv/n c^2} \simeq \left(\frac{c}{n} \pm v\right) \left(1 \mp \frac{v}{cn}\right) \simeq \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{c^2}\right). \quad (1.16)$$

Как видно, (1.16) есть в точности то выражение, которое было экспериментально установлено в опытах Физо.

Пример 1.9. Два сверхзвуковых самолета летят навстречу друг другу. Их скорости относительно Земли соответственно 1500 и 3000 км/час. Какова скорость первого самолета (1500 км/час), измеренная пассажирами второго самолета?

При решении такого рода задач необходимо понять, что в законе сложения скоростей (1.13) есть три абстрактных тела: системы S , S' и точка. Если обозначить скорость точки относительно S через $U_{T/S}$, скорость точки относительно S' через $U_{T/S'}$, а скорость S' относительно S через $U_{S'/S}$, то закон сложения скоростей примет вид:

$$U_{T/S} = \frac{U_{T/S'} + U_{S'/S}}{1 + U_{T/S'} U_{S'/S} / c^2}. \quad (1.17)$$

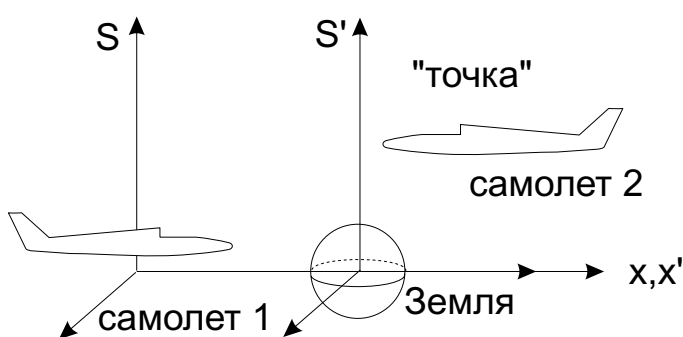


Рис. 5.

Формула наглядно демонстрирует смысл всех сомножителей, входящих в нее, что упрощает решение задач, в которых рассматривается движение трех или более “тел”.

В данном примере свяжем понятия S , S' , “точка” с самолетами и Землей следующим образом: “точка” = самолет 2, система S = самолет 1, система S' = Земля. Тогда $U_{T/S}$ - скорость движения самолета 2 относительно самолета 1 (то, что требуется определить в данном примере), $U_{T/S'}$ - скорость движения самолета 2 относительно

Земли (3000 км/час), наконец $U_{S'/S}$ - скорость движения самолета 1 относительно Земли (1500 км/час). Таким образом, на основании (1.17) находим: $U = 4499.999999986$ /.

1.4 Четырехмерные обозначения.

Любые 4 величины A^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), которые преобразуются при переходе от одной инерциальной системы S к другой S' по закону:

$$A^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_{\lambda} A'^{\lambda}, \quad (1.18)$$

где γ^μ_{λ} - матрица преобразований Лоренца, образуют **контравариантный** 4-вектор. В принципе имеется бесконечно много преобразований Лоренца (т.е. бесконечно много матриц γ в зависимости от относительного движения систем координат). В частном случае выбора систем координат как указано на рис. 1 матрица γ имеет вид:

$$\gamma = \begin{pmatrix} \Gamma(v) & \Gamma(v) v/c & 0 & 0 \\ \Gamma(v) v/c & \Gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Ковариантный 4-вектор определяется как набор 4-х величин A_μ , которые преобразуются при переходе из одной системы координат в другую по закону:

$$A_\mu = \sum_{\lambda=0}^3 a_\mu^{\lambda} A'_\lambda, \quad (1.20)$$

где матрица a совпадает с γ с заменой $v \rightarrow -v$, т.е. $a \equiv \gamma(-v)$.

В СТО, кроме 4-векторов, используется понятие 4-тензоров (чаще всего второго ранга). Контравариантным 4-тензором второго ранга называется объект, состоящий из 16 величин $F^{\alpha,\beta}$ ($\alpha, \beta \in 0 \dots 3$), которые связаны с компонентами $F'^{\alpha,\beta}$ в произвольной системе координат соотношением:

$$F^{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 \gamma^\lambda_{\alpha} \gamma^\mu_{\beta} F'^{\alpha\beta}. \quad (1.21)$$

Кроме контравариантного 4-тензора определяется также и ковариантный 4-тензор второго ранга, как объект, 16 компонент которого преобразуются при переходе от одной инерциальной системы координат к другой по закону:

$$F_{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 a_{\lambda}^{\alpha} a_{\mu}^{\beta} F'_{\alpha\beta}. \quad (1.22)$$

Связь ко- и контра-вариантных составляющих 4-векторов имеет вид:

$$A^{\mu} = \sum_{\lambda=0}^3 g^{\mu\lambda} A_{\lambda}, \quad A_{\mu} = \sum_{\lambda=0}^3 g_{\mu\lambda} A^{\lambda}. \quad (1.23)$$

16 элементов $g^{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda}$ образуют 4-тензор 2-го ранга, который имеет специальное название “метрический тензор” и его компоненты равны: $g^{00} = 1, g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1$, остальные $g^{\alpha\beta} = 0 (\alpha \neq \beta)$. Соотношения (1.23) фактически определяют правила “опускания” или “поднимания” индекса в 4-векторе или 4-тензоре

$$F^{\lambda\mu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 g^{\lambda\alpha} g^{\mu\beta} F_{\alpha\beta}, \quad F^{\lambda\mu} = \sum_{\alpha=0}^3 g^{\lambda\alpha} F_{\alpha}^{\mu} \text{ и т.п.}$$

Для 4-векторов определено следующие понятие скалярного произведения:

$$A \cdot B = \sum_{\mu=0}^3 A^{\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 A_{\mu} B^{\mu}. \quad (1.24)$$

Соответственно для 4-тензоров и 4-векторов определена операция “свертки”, как сумма по одной или нескольким парам одноименных индексов. Например свертка тензора $F^{\alpha\beta}$ и 4-вектора A_{β} есть сумма по индексу β :

$$\sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} A_{\beta} \equiv F^{\alpha\beta} A_{\beta} = v^{\alpha}. \quad (1.25)$$

В выражении (1.25) показана общепринятая условность опускания изображения операции суммирования по одноименным ко- и контра-вариантным индексам. В соответствии с данными определениями скалярное произведение двух 4-векторов - есть свертка этих векторов.

Для тензоров определены обычные алгебраические понятия. Так равенство тензоров означает, что равны компоненты тензоров $A^{\alpha\beta} = C^{\alpha\beta}$. Сумма или разность $A^{\alpha\beta} \pm B^{\alpha\beta}$ определяются в обычном алгебраическом понимании для компонент тензоров.

Пример 1.10. Доказать, что матрицы лоренцовских преобразований

γ из (1.18) и a из (1.20) удовлетворяют условию ортогональности:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \gamma^\alpha{}_\lambda a_\alpha{}^\nu = \delta_\lambda^\nu = \delta_{\nu\lambda}, \quad (1.26)$$

где δ_λ^ν или $\delta_{\nu\lambda}$ - обычный (4-мерный) символ Кронекера.

Для доказательства рассмотрим совокупность 4-х переменных ct, x, y, z и обозначим $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. В результате соотношения (1.3) примут форму соотношения (1.18), т.е. так определенные 4-компоненты образуют 4-вектор, который называется 4-координата или 4-радиус вектор. На основании (1.22) ковариантный 4-радиус вектор имеет следующие компоненты $x_\beta \equiv (ct, -x, -y, -z)$. Запишем теперь скалярное произведение 4-координат: $x \cdot x = \sum_{\alpha=0}^3 x^\alpha x_\alpha = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Как известно, такая величина, получившая название квадрат интервала, является инвариантной величиной при преобразованиях Лоренца (см. пример 1.1), т.е.: $\sum_\alpha x^\alpha x_\alpha = \sum_\alpha x'^\alpha x'_\alpha = \text{invar}$. Подставляя в левую часть данного равенства преобразования ко- и контравариантных компонент 4-векторов (1.18), (1.20) находим:

$$\sum_{\alpha=0}^3 \left(\sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\alpha{}_\lambda x'^\lambda \right) \cdot \left(\sum_{\mu=0}^3 a_\alpha{}^\mu x'_\mu \right) = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 \left(\sum_{\alpha=0}^3 \gamma^\alpha{}_\lambda a_\alpha{}^\mu \right) x'^\lambda x'_\mu$$

Так как последнее выражение должно быть равно $\sum_{\mu=0}^3 x'^\mu x'_\mu$, очевидно что выполняется равенство (1.26)

Пример 1.11. Доказать, что для любых 4-векторов их скалярное произведение является инвариантом при преобразованиях Лоренца, т.е.:

$$A \cdot B = \sum_\mu A^\mu B_\mu = \sum_\mu A'^\mu B'_\mu = A' \cdot B' = \text{invar}. \quad (1.27)$$

Согласно (1.18), (1.20) и на основании (1.26) получим

$$A \cdot B = \sum_{\mu=0}^3 A^\mu B_\mu = \sum_{\mu,\lambda,\nu=0}^3 \gamma^\mu{}_\lambda a_\mu{}^\nu A'^\lambda B'_\nu = \sum_{\lambda=0}^3 A'^\lambda \cdot B'_\lambda = A' B'.$$

Пример 1.12. Доказать, что объект, который называется “метрический тензор” есть 4-тензор.

Для доказательства этого утверждения необходимо проверить, что для метрического тензора выполняются соотношения (1.21) и (1.22). Компоненты тензоров $g'^{\lambda\mu}$ и $g'_{\lambda\mu}$ в произвольной системе координат S'

можно представить в виде диагональной матрицы у которой $g'^{00} = 1$, $g'^{11} = g'^{22} = g'^{33} = -1$. Вычислим на основании (1.21) компоненты метрического тензора в системе координат S , например:

$$g^{00} = \gamma^0_0 \gamma^0_0 g'^{00} + \gamma^0_1 \gamma^0_1 g'^{11} = \Gamma^2(v) - \frac{v^2}{c^2} \Gamma^2(v) = 1.$$

$$g^{10} = \gamma^1_0 \gamma^0_0 g'^{00} + \gamma^1_1 \gamma^0_1 g'^{11} = \frac{v}{c} \Gamma^2(v) - \frac{v}{c} \Gamma^2(v) = 0.$$

Аналогично проверяется выполнение (1.21) для остальных компонент $g^{\lambda\mu}$ и (1.22) для $g_{\lambda\mu}$. В результате в системе координат S получим матрицу g , являющейся диагональной матрицей с теми же элементами, что и g' .

Пример 1.13. *Две системы отсчета движутся относительно лабораторной системы координат со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Доказать, что их относительная скорость удовлетворяет соотношению:*

$$v^2 = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - [\vec{v}_1 \times \vec{v}_2]^2/c^2}{[1 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)/c^2]^2}. \quad (1.28)$$

Воспользуемся определением 4-скорости: $U^\alpha \equiv dx^\alpha/dt_s$, где dt_s - бесконечно малый интервал собственного времени $dt_s = ds/c$, ds - бесконечно малый интервал. По определению 4-скорость есть 4-вектор, так как dt_s - инвариант, а dx^α - 4 вектор. Запишем 4-скорости систем S_1 и S_2 в системе отсчета, связанной с S_1 . По определению:

$$U_1 = (c, \vec{0}), \quad U_2 = (c\Gamma(\vec{v}), \vec{v}\Gamma(\vec{v})). \quad (1.29)$$

Здесь $\vec{v}$ - относительная скорость движения системы координат S_2 по отношению к системе координат S_1 . Так как U_1, U_2 - 4-векторы, их скалярное произведение инвариантно $U_1 U_2 = U'_1 U'_2$.

В лабораторной системе 4-скорости систем S_1 и S_2 известны по условию задачи:

$$U'_1 = (c\Gamma(\vec{v}_1), \vec{v}_1\Gamma(\vec{v}_1)), \quad U'_2 = (c\Gamma(\vec{v}_2), \vec{v}_2\Gamma(\vec{v}_2)). \quad (1.30)$$

Составляя скалярное произведение 4-векторов (1.29) и (1.30), получаем уравнение для определения v .

$$c^2 \Gamma(\vec{v}) = c^2 \Gamma(\vec{v}_1) \Gamma(\vec{v}_2) - (\vec{v}_1 \vec{v}_2) \Gamma(\vec{v}_1) \Gamma(\vec{v}_2).$$

Возводя полученное равенство в квадрат находим:

$$c^2 - v^2 = c^2 \frac{(c^2 - v_1^2)(c^2 - v_2^2)}{[c^2 - (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)]^2}.$$

Учитывая, что имеет место алгебраическое тождество $(c^2 - v_1^2)(c^2 - v_2^2) = c^4 - c^2(v_1^2 + v_2^2) + v_1^2 v_2^2$ и кроме того, что $v_1^2 v_2^2 = [\vec{v}_1 \times \vec{v}_2]^2 + (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)^2$, получим выражение (1.28)

Пример 1.14. Объект, имеющий длину l_0 в собственной системе, сфотографирован с большого расстояния (рис. 6). Направление на фотокамеру составляет угол α с направлением скорости объекта v . Чему равна кажущаяся длина объекта, измеренная по фотоснимку?

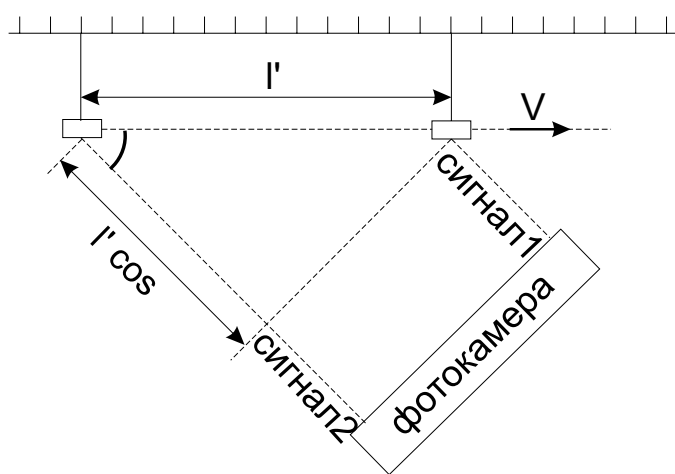


Рис. 6.

Ответ $l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ соответствует процессу измерения, при котором в лабораторной системе одновременно засекаются начало и конец объекта. Однако в данном случае регистрируются сигналы, пришедшие одновременно в фотоаппарат! Поэтому сигнал 2 должен пройти

дополнительный путь $l' \cos \alpha$, где l' - кажущаяся длина объекта. Из преобразований Лоренца:

$$l_0 = \Delta x = \left[\Delta x' - v \Delta t' \right] \Gamma(v) = \left[l' - (v l' \cos \alpha)/c \right] \Gamma(v),$$

откуда

$$l' = \frac{l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v \cos \alpha)/c}.$$

УПРАЖНЕНИЯ к гл. 1

1. Показать, что постулаты СТО противоречат классической механике.
2. Привести 50 примеров инерциальных систем отсчета.
3. Если бы вспышки молнии в примере 1.4 оставили бы следы на Земле, то каким было бы расстояние между ними?
4. Граница видимой вселенной отстоит от нас на расстоянии 10^{10} свет. лет. Космический путешественник движется со скоростью такой, что $\Gamma(v) =$

10^8 . Как далеко в световых годах отстоит граница видимой вселенной по наблюдениям космонавта?

5. Доказать, что $\partial_\mu \varphi$ - 4-вектор (φ - скаляр, $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$).
6. Доказать, что 4-дивергенция $\sum_{\mu=0}^3 \partial_\mu A^\mu$ - инвариант. (A_μ - 4 вектор).
7. Доказать, что $\partial_\mu A_\nu$ - ковариантный 4-тензор 2-го ранга. (A_ν - 4 вектор).
8. Доказать, что $\square \varphi$ - скаляр, а $\square A^\mu$ - 4-вектор. (φ - скаляр, A_ν - 4 вектор).
9. Показать, что два последовательных преобразования Лоренца дают преобразование Лоренца с относительной скоростью (1.13).
10. Доказать, что символ Кронекера есть 4-тензор.
11. Показать, что матрица преобразований Лоренца не является 4-тензором.
12. Вывести формулы преобразования Лоренца для радиус-вектора $\vec{r}$, и t , не предполагая, что скорость $\vec{v}$ системы S' относительно S параллельна оси X . Результат представить в векторной форме.

2 МЕХАНИКА СТО. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА.

2.1 Основные уравнения механики СТО. Масса. Импульс. Энергия.

Обобщением уравнений Ньютона на случай движения частицы с произвольной скоростью (вплоть до $v \sim c$) являются уравнения:

$$\frac{dp^\alpha}{dt_s} = F^\alpha, \quad \alpha \in 0, 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

где p - 4-импульс $p^\alpha = m u^\alpha$, m - масса частицы, u^α - 4-скорость, компоненты которой определяются соотношением $u^\alpha = dx^\alpha/dt_s$ (x^α - компоненты 4-радиус-вектора, $dt_s = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ - собственное время), $F \equiv (F^0, \vec{F})$ - 4-сила Минковского, пространственно-временные компоненты которой выражаются через “обычную” силу $\vec{F}$ равенствами:

$$F^0 = \Gamma(v)(\vec{v} \cdot \vec{F})/c, \quad \vec{F} = \Gamma(v)\vec{F} \quad (2.2)$$

$\vec{v}$ -скорость движения частицы. 4-импульс имеет следующие пространственно-временные компоненты $p^\alpha \equiv (p^0, \vec{p}) \equiv (\varepsilon/c, \vec{p})$:

$$p^0 = \frac{\varepsilon}{c} = mc\Gamma(v) = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = m\vec{v}\Gamma(v) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.3)$$

здесь ε - энергия частицы, m - масса частицы. Следует обратить внимание на то, что определения энергии и импульса в (2.3) отличаются от используемых в механике Ньютона (!) и только в предельном случае $v \ll c$ практически переходят в них. Для практических нужд уравнения (2.1) удобнее писать в следующем виде:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{F}). \quad (2.4)$$

Как ясно из (2.1), уравнения релятивистской механики (2.1) или (2.4) инвариантны относительно преобразований Лоренца. Кроме того необходимо подчеркнуть, что квадрат 4-импульса есть инвариант

$$p^2 = \sum_{\alpha=0} p^\alpha p_\alpha = m^2 c^2 \quad (2.5)$$

Написанные выше уравнения естественно обобщаются на случай системы частиц. В результате удастся решать задачи об упругих столкновениях, рассеянии частиц на фиксированном потенциале, распаде частиц и т.п. При этом используется фундаментальный динамический закон, состоящий в том, что сумма 4-импульсов всех частиц остается постоянной (это законы сохранения энергии и импульса). Будем о нем говорить как о законе сохранения 4-импульса.

Следует обратить внимание и на понятие “энергия покоя”. Это энергия частицы в системе координат, в которой она покоится. В релятивистской механике вводится понятие “кинетическая” энергия по следующему определению: $k = \varepsilon - mc^2$.

Пример 2.1. *Какая энергия заключена в 1 г. угля? Сколько надо сжечь угля, чтобы выделилась такая же энергия, если известно, что при сгорании 1 г. угля в результате реакции горения выделяется ~ 7000 ккал $\cong 2.9 \cdot 10^4$ Дж.*

Энергия покоя 1 г. угля равна: $\varepsilon = mc^2 = (10^{-3}) (3 \cdot 10^8)^2 \simeq 9 \cdot 10^{13} \simeq 10^{14}$. Для получения такой же энергии химическим путем необходимо сжечь $m = 10^{14} / 2,9 \cdot 10^4 / \simeq 3 \cdot 10^9 = 3 \cdot 10^6 = 3000$. угля. Для наглядности

отметим, что 1 ж/д вагон угля весит 60 т. То есть такое количество угля можно перевезти в 50 вагонах (это целый состав!).

Пример 2.2. При взрыве 1 тонны тринитротолуола выделяется $\sim 10^9$ кал = $4.18 \cdot 10^9$ Дж. Какое количество вещества преобразуется в энергию при взрыве 100 мегатонного ядерного заряда?

$$m = \varepsilon/c^2 = 4.18 \cdot 10^9 \cdot 10^8 / 9 \cdot 10^{16} / 2 = 4.6.$$

Пример 2.3. В современных ускорителях протоны достигают энергии, в 400 раз превышающую их энергию покоя. Какова скорость движения этих протонов?

$$400 mc^2 = mc^2 \Gamma(v), \text{ т.е.: } v = c \sqrt{1 - (1/400)^2} \simeq 0.999997 c.$$

Пример 2.4. Частица с массой покоя m_1 и скоростью $\vec{v}_1$ сталкивается с покоящейся частицей с массой m_2 , которая поглощает налетевшую частицу. Найти массу покоя и скорость $\vec{v}$ образовавшейся составной частицы.

Пусть p_c - 4-импульс образовавшийся составной системы, а $p(1)$ и $p(2)$ 4-импульсы налетающей m_1 и покоящейся m_2 частиц, соответственно. На основании закона сохранения 4-импульса имеем:

$$p_c = p(1) + p(2) = \left[m_1 c \Gamma(v_1), m_1 \vec{v}_1 \Gamma(v_1) \right] + \left[m_2 c, \vec{0} \right], \quad (2.6)$$

Для определения массы составной частицы M воспользуемся инвариантностью квадрата 4-импульса $p_c^2 = M^2 c^2$. Откуда

$$M = \frac{1}{c} \sqrt{p_c^2} = \frac{1}{c} \sqrt{p(1)^2 + 2p(1) \cdot p(2) + p(2)^2} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \Gamma(v_1)}$$

так как $p(1)^2 = m_1^2 c^2$, $p(2)^2 = m_2^2 c^2$, $2p(1) \cdot p(2) = 2m_1 m_2 c^2 \Gamma(v_1)$.

Для нахождения скорости составной частицы отметим, что из (2.6) известны ее импульс $\mathbf{p}_c$ и энергия ε_c : $\mathbf{p}_c = m_1 \vec{v}_1 \Gamma(v_1)$; $\varepsilon_c/c = m_1 c \Gamma(v_1) + m_2 c$. Соответственно из (2.3) ясно, что между скоростью, энергией и импульсом любой частицы имеет место равенство $\vec{p} = \varepsilon \vec{v}_c / c^2$ (так как $\varepsilon/c^2 = m \Gamma(v)$).

Отсюда

$$\vec{v}_c = \frac{c^2 \vec{p}_c}{\varepsilon_c} = \vec{v}_1 \cdot \left[1 + \frac{m_2}{m_1} \Gamma^{-1}(v_1) \right]^{-1}$$

Пример 2.5. В системе, в которой нейтрон покоится, β - распад изотропен, а скорость испущенного электрона $v = 0.77c$ (β - распад: $n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e$). Какие значения вектора импульса

р электрона в лабораторной системе отсчета возможны, если нейтрон пролетает через лабораторию со скоростью u ?

В системе отсчета, связанной с покоящимся нейтроном 4-импульс электрона обозначим через p' , тогда считая, что электрон движется в плоскости X, Y , имеем: $p' \equiv (\varepsilon'/c, p'_x = |\mathbf{p}'| \cos \theta', p'_y = |\mathbf{p}'| \sin \theta', 0)$, $\varepsilon' = mc^2 \Gamma(v)$. На основании преобразований Лоренца для компонент p'_x и p'_y находим в лабораторной системе:

$$p_x = \Gamma(u) \left(p'_x + \frac{u}{c^2} \varepsilon' \right) = \Gamma(u) \left[|\mathbf{p}'| \cos \theta' + \frac{u}{c^2} \varepsilon' \right]; \quad p_y = p'_y = |\mathbf{p}'| \sin \theta'.$$

Подставляя значение $\sin \theta'$ и $\cos \theta'$ из последних двух равенств в тригонометрическое тождество $\sin^2 \theta' + \cos^2 \theta' = 1$, находим:

$$\left[\frac{p_x - \Gamma(u) u \varepsilon' / c^2}{\Gamma(u) |\mathbf{p}'|} \right]^2 + \left[\frac{p_y}{\Gamma(u) |\mathbf{p}'|} \right]^2 = 1$$

Таким образом ясно, что в лабораторной системе отсчета конец вектора импульса в пространстве (p_x, p_y) (импульсное пространство) лежит на эллипсе с центром в точке $(u \varepsilon' \Gamma(u) / c^2, 0)$.

2.2 Элементарные определения квантовой теории света. Законы сохранения в физике элементарных частиц.

В начале века Планком было показано, что испускание или поглощение электромагнитного излучения осуществляется порциями (квантами). При этом энергия такого кванта пропорциональна частоте колебаний света $\varepsilon = \hbar \omega$ ($\hbar \simeq 1.05 \cdot 10^{-27}$ эрг.сек. — постоянная Планка). В дальнейшем Эйнштейном было установлено, что помимо ε кванту света необходимо приписать ещё и импульс, величина которого $|\vec{\mathbf{p}}| = \varepsilon/c$, а направление $\vec{\mathbf{p}}$ совпадает с направлением распространения света. Удобно кроме импульса ввести волновой вектор $\vec{\mathbf{k}}$ по определению $\vec{\mathbf{p}} = \hbar \vec{\mathbf{k}}$. Направление $\vec{\mathbf{k}}$ совпадает с направлением $\vec{\mathbf{p}}$. $|\vec{\mathbf{k}}| = \omega/c = 2\pi/(cT) = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны. Смысл такой квантовой теории света заключается в том, что обмен энергией и импульсом между взаимодействующими системами происходит путем рождения или уничтожения квантов света электромагнитного излучения. Последнее означает возможность применения фундаментальных законов сохранения энергии и импульса в процессах с участием электромагнитного поля. Действительно, пусть E и $\vec{\mathbf{p}}$ — энергия и импульс произвольной системы

до взаимодействия с излучением, а E' и $\vec{p}'$ энергия и импульс системы после взаимодействия. Соответственно через $\hbar\omega$ и $\hbar\vec{k}$ обозначим энергию и импульс кванта электромагнитного излучения до взаимодействия, а $\hbar\omega'$ и $\hbar\vec{k}'$ после взаимодействия. Тогда законы сохранения энергии импульса выражаются в виде:

$$\hbar\omega + E = \hbar\omega' + E', \quad \hbar\vec{k} + \vec{p} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}' \quad (2.7)$$

Порцию электромагнитного излучения, обладающую энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\vec{k}$ принято называть фотоном. Используя обозначения предыдущего параграфа, нетрудно ввести 4-импульс фотона:

$$p = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \hbar\vec{k} \right) = \left(\hbar\omega, \hbar\vec{k} \right) \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что масса фотона равна нулю, т.к. $p^2 = 0$. В ряде случаев необходимо применять описанную здесь квантовую теорию света для электромагнитного поля, распространяющегося в среде с показателем преломления $n(\omega)$, зависящем от частоты излучения. В этом случае энергия и импульс фотона есть: $\varepsilon = \hbar\omega$; $\vec{p} = n(\omega) \hbar\vec{k}$.

Пример 2.6. Доказать, что изолированный свободный электрон не может ни поглотить, ни излучить квант электромагнитного поля.

Допустим, что такой процесс поглощения (излучения) возможен. Обозначим через p_e и p'_e 4-импульсы электрона до поглощения (излучения) и после поглощения (излучения) фотона. Соответственно 4-импульс фотона обозначим p_γ . По закону сохранения 4-импульса имеем $p_e \pm p_\gamma = p'_e$. Возводя в квадрат полученное равенство находим: $(p_e p_\gamma) = 0$. Но, например, в системе отсчета, в которой $p_e = (mc, \mathbf{0})$ и $p_\gamma = (\hbar\omega/c, \hbar\vec{k})$, тогда: $(p_\gamma p_e) = m_e \hbar\omega = m_e \varepsilon_\gamma = 0$, т.е. равенство нулю скалярного произведения 4-векторов означает, что энергия фотона должна быть равна нулю, следовательно фотон не существует. Таким образом, изолированный электрон не может ни поглотить, ни испустить фотон,

Пример 2.7. Вычислить пороговую энергию, при которой нуклон N претерпевает реакцию $\gamma + N \rightarrow N + \pi$, где γ - фотон, π - пи-мезон, N - нуклон. Объяснить с помощью данной реакции обрезание спектра космических лучей, считая фотоны реликтовыми (их температура $\sim 3^\circ K$, а энергия $\sim kT$, где k - постоянная Больцмана), $m_N = 940$ мэВ, $m_\pi = 140$ мэВ.

Для указанной реакции закон сохранения 4-импульса имеет следующий вид: $p_\gamma + p_N = p'_N + p_\pi$. Эдесь p_γ - 4-импульс фотона, p_N и p'_N - 4-импульсы нуклона до и после реакции, p_π - 4-импульс пи-мезона. В системе центра масс при достижении порога реакции для 4-импульса образовавшихся частиц имеем $p'_N + p_\pi = ((m_N + m_\pi)c, \mathbf{0})$. Квадрат 4-импульса является инвариантом т. е:

$$(p_\gamma + p_N)^2 = 2p_\gamma p_N + p_N^2 = (m_N + m_\pi)^2 / c^2 \quad (2.9)$$

В лабораторной системе отсчета $p_\gamma = (\varepsilon_\gamma/c, \hbar\vec{k}) = (\hbar\omega/c, \hbar\vec{k})$, $p_N = (\varepsilon_N/c, \vec{p}_N)$. В результате из (2.9) находим:

$$2\varepsilon_\gamma\varepsilon_N/c^2 - 2|\hbar\vec{k}||\vec{p}_N|\cos\theta + m_N^2c^2 = c^2(m_N^2 + 2m_Nm_\pi + m_\pi^2). \quad (2.10)$$

В силу того, что $|\hbar\vec{k}| = \varepsilon_\gamma/c$ при центральном столкновении (наиболее энергетически выгодном) $\theta = \pi$ получим из (2.10):

$$2\varepsilon_\gamma(\varepsilon_N + |\vec{p}_N|c) = m_\pi(m_\pi + 2m_N)/c^4 \quad (2.11)$$

Так как импульс $\vec{p}_N$ связан с энергией соотношением $\varepsilon_N^2 = p_N^2c^2 + m_N^2c^4$, уравнение (2.11) является уравнением для определения ε_N (граничной энергии нуклона). Это уравнение можно решить приближенно с учетом $\varepsilon_N \gg m_Nc^2$. В этом случае $\varepsilon_N = m_\pi c^4(2m_N + m_\pi)/4\varepsilon_\gamma$. Подставляя сюда $\varepsilon_\gamma = \hbar\omega = kT \simeq 2.5 \cdot 10^{-10}$ и $m_\pi c^2 = 140$ МэВ, $m_N c^2 = 940$ МэВ, находим, что для нуклона с энергией $\varepsilon_N \sim 2.8 \cdot 10^{14}$ МэВ возможна реакция $\gamma + N \rightarrow N' + \pi$, что качественно объясняет обрывание спектра космических лучей.

Пример 2.8. Рассмотрим реакцию $A \rightarrow B + C$ для частиц с массами m_A, m_B, m_C . 1) Доказать, что, если A покоится в лабораторной системе, то частица B обладает энергией

$$\varepsilon_B = c^2(m_A^2 + m_B^2 - m_C^2)/2m_A \quad (2.12)$$

2) Доказать, что если при излучении покоящийся атом переходит из состояния $E_i = Mc^2$ в состояние $(M - \delta)c^2$, то энергия излученного фотона удовлетворяет неравенству $\hbar\omega < \delta c^2$. Объясните почему в эффекте Мёссбауэра $\hbar\omega = \delta c^2$. 3) Если A распадается, двигаясь в лабораторной системе, найти соотношение между углом, под которым испускается частица B (по отношению к направлению движения A) и энергиями частиц A и B .

1. Из закона сохранения 4-импульса следует, что $p_A = p_B + p_C$. Перепишем его в виде $p_C^2 = (p_A - p_B)^2$. Так как $p_C^2 = m_C^2 c^2$, а в лабораторной системе $p_A = (m_A c, \vec{0})$, $p_B = (\varepsilon_B/c, \vec{p}_B)$ находим: $m_C^2 c^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2\varepsilon_B m_A$ откуда следует выражение (2.12).

2. Пусть A есть первоначальный атом, B - фотон, C - атом в конечном состоянии. Тогда на основании (2.12) получим:

$$\varepsilon_B = \hbar\omega = c^2[M^2 - (M - \delta)^2]/2M = c^2(\delta - \delta^2/2M) < \delta^2$$

В реальных условиях $\hbar\omega \neq \delta c^2$, т.к. часть энергии уходит на отдачу атома M . В эффекте Мёссбауэра импульс отдачи распределяется между $\sim 10^{23}$ атомами, поэтому энергия отдачи пренебрежимо мала.

3. В этом случае 4-импульс частицы A : $p_A = (\varepsilon/c, \vec{p}_A)$, а частицы B : $p_B = (\varepsilon_B/c, \vec{p}_B)$. В результате для закона сохранения 4-импульса имеем $p_C^2 = (p_A - p_B)^2$ или $m_C^2 c^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2\varepsilon_B \varepsilon_A/c^2 + 2|\vec{p}_A||\vec{p}_B| \cos \theta$. Отсюда с учетом $p = \sqrt{\varepsilon^2 - m^2 c^4}/c$, находим

$$m_C^2 c^2 = m_A^2 c^2 + m_B^2 c^2 - 2 \left\{ \varepsilon_A \varepsilon_B - \sqrt{(\varepsilon_A^2 - m_A^2 c^4)(\varepsilon_B^2 - m_B^2 c^4)} \cos \theta \right\} / c^2,$$

или

$$\cos \theta = \frac{c^4 (m_A^2 + m_B^2 - m_C^2) + 2\varepsilon_A \varepsilon_B}{2\sqrt{(\varepsilon_A^2 - m_A^2 c^4)(\varepsilon_B^2 - m_B^2 c^4)}}.$$

2.3 Движение заряженных частиц в электромагнитном поле.

Сила, действующая на заряд q в электромагнитном поле, есть сила Лоренца:

$$\vec{\mathcal{F}} = q\vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \quad (2.13)$$

Это выражение справедливо при любых скоростях движения частицы. С учетом основных уравнений движения частицы из механики СТО (2.4) для заряженной частицы имеем:

$$\dot{\vec{p}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{q}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad \dot{\varepsilon} \equiv \frac{d\varepsilon}{dt} = q(\vec{E} \cdot \vec{v}) \quad (2.14)$$

В этих уравнениях $\vec{p}$ и ε - релятивистские импульсы и энергия частицы (2.3). Как следует из (2.14), в чисто магнитном поле $\dot{\varepsilon} = 0$ (т.е. энергия сохраняется). Наличие такого интеграла движения в магнитном поле существенно облегчает решение задач. Движение заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле можно рассматривать с использованием

метода Лагранжа или метода Гамильтона. В этих случаях введение переменных, характеризующих электромагнитное поле в уравнения движения, достигается на основании так называемой минимальной замены: импульс частицы заменяется на обобщенный импульс $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{\tilde{A}}/c$ где $\vec{\tilde{A}}$ векторный потенциал.

Пример 2.9. Электрон с зарядом e массой m движется со скоростью $\vec{v}$ вдоль оси X , в лабораторной системе отсчета и в точке $x = 0$ попадает в однородное электрическое поле напряженности $\vec{E}$, направленное вдоль оси Y . Найти траекторию движения электрона.

Запишем уравнение (2.1) для $\alpha = 1$ получим $dp^1/dt_s = 0$, и следовательно $U^1 = \text{const}$ (где U^μ - компоненты 4-скорости электрона). С учетом движения частицы в области, где $\vec{E} = 0$, имеем $U^1 = v\Gamma(v) = \text{const}$, а так как $U^1 = dx/dt_s$, найдем $t_s = x/v\Gamma(v)$. Запишем теперь уравнения (2.1) для $\alpha = 0$ и $\alpha = 2$ получим с учетом (2.2)

$$\frac{dU^0}{dt_s} = \omega U^{(2)}, \quad \frac{dU^{(2)}}{dt_s} = \omega U^{(0)}, \quad \omega \equiv \frac{eE}{mc} \quad (2.15)$$

Объединяя последние два уравнения, находим $d^2U^{(2)}/dt_s^2 = \omega^2 U^{(2)}$. Общее решение этого уравнения есть: $U^{(2)} = A \cdot \text{sh}(\omega t_s) + B \cdot \text{ch}(\omega t_s)$, где A и B произвольные константы. Учитывая начальное условие $U^{(2)}(0) = 0$, получаем $B = 0$, т.е. $U^{(2)} = A \cdot \text{sh}(\omega t_s)$. На основании (2.15) находим $U^{(0)}(t_s) = A \cdot \text{ch}(\omega t_s)$ и так как при $t_s = 0$, $U^{(0)}(0) = c\Gamma(v)$. Отсюда $A = c\Gamma(v)$ т. е.:

$$\frac{dy}{dt_s} = U^{(2)} = c\Gamma(v) \text{sh}(\omega t_s) \quad (2.16)$$

Интегрируя (2.16) по dt_s с учетом $t_s = x/v\Gamma(v)$: и начального условия $y = 0$ при $x = 0$, находим траекторию движения электрона:

$$y = \Gamma(v) \frac{c}{\omega} \left[\text{ch} \left\{ \frac{\omega x}{v\Gamma(v)} \right\} - 1 \right] \quad (2.17)$$

Пример 2.10. Определить характер движения заряженной частицы в постоянном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$.

На основании (2.13) уравнения движения имеют вид:

$$\dot{\vec{p}} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}], \quad \dot{\varepsilon} \equiv \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad (2.18)$$

Учитывая, что $\vec{p} = \varepsilon \vec{v}/c^2$ и постоянство во времени энергии частицы на основании (2.18):

$$\dot{\vec{v}} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e\mathbf{c}}{\varepsilon} [\vec{v} \times \vec{B}] \quad (2.19)$$

Дифференцируя (2.19) по времени и подставляя $\dot{\vec{v}}$ из (2.19) получим следующее уравнение:

$$\ddot{\vec{v}} + \left(\frac{e\mathbf{c}B}{\varepsilon}\right)^2 \vec{v} = \left(\frac{e\mathbf{c}}{\varepsilon}\right)^2 \vec{B} (\vec{v} \cdot \vec{B}) \quad (2.20)$$

Представим скорость в виде $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, где $\vec{v}_{\parallel}$ - составляющая скорости частицы, параллельная направлению поля, а $\vec{v}_{\perp}$ - составляющая скорости, лежащая в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$. Из (2.20) получаем следующие уравнения для $\vec{v}_{\parallel}$ и $\vec{v}_{\perp}$:

$$\ddot{\vec{v}}_{\perp} + \omega^2 \vec{v}_{\perp} = 0, \quad \dot{\vec{v}}_{\parallel} = 0, \quad \omega = e\mathbf{c}B/\varepsilon.$$

Отсюда ясно, что характер движения частицы - вращение с частотой ω в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{B}$ и движение с постоянной скоростью, в направлении, параллельном $\vec{B}$. При этом радиус окружности в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, равен:

$$R = \frac{|\vec{v}_{\perp}|}{\omega} = \frac{|\vec{v}_{\perp}| \varepsilon}{ceB} = \frac{c|\vec{p}_{\perp}|}{eB} \quad (2.21)$$

Здесь $\vec{p}_{\perp}$ - проекция импульса на плоскость, перпендикулярную $\vec{B}$. Такая траектория движения соответствует винтовой линии.

Пример 2.11. Как известно из классической механики, при медленном изменении условий движения остаются постоянными так называемые адиабатические инварианты [8]. Пусть магнитное поле медленно меняется. Выяснить, как малые изменения магнитного поля влияют на характер движения заряженной частицы. Объяснить на основе результата данной задачи как “работают” магнитное зеркало и магнитные “ловушки”? Объяснить также связь магнитных ловушек с наличием радиационных поясов Земли (движение считать нерелятивистским).

Так как движение в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, периодически, то адиабатическим инвариантом является циркуляция проекции вектора обобщенного импульса по окружности

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \left(\vec{p}_{\perp} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{p}_{\perp} \cdot d\vec{l} - \frac{e}{2\pi c} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Так как $\vec{p}_\perp$ постоянно по абсолютной величине и направлено по $d\vec{l}$ с учетом теоремы Стокса находим:

$$I = \frac{1}{2\pi} 2\pi R p_\perp + \frac{|e|}{2\pi c} B \pi R^2 = R p_\perp + \frac{|e|B}{2c} R^2.$$

Подставляя в полученное выражение (2.21), находим: $I = (3cp_\perp^2)/(2|e|B)$, т.е. при медленном изменении B , $p_\perp \sim \sqrt{B}$. Так как при движении в магнитном поле $\varepsilon = const$ (т.е. $p^2 = const$ в нерелятивистском пределе), $\vec{p} = \vec{p}_\parallel + \vec{p}_\perp$ или, $p_\parallel^2 = p^2 - p_\perp^2 = p^2 - const' B(r)$, а так как $p_\parallel^2$ всегда ≥ 0 ясно, что проникновение частицы в область достаточно сильного поля невозможно. При движении в направлении увеличивающегося поля радиус винтовой траектории убывает пропорционально $1/\sqrt{B}$. При достижении границы, на которой $|\vec{p}_\parallel| = 0$, частица отражается и начинает двигаться в противоположном направлении, - это магнитное зеркало. Устройство с двумя магнитными зеркалами является магнитной ловушкой (рис. 7).



Рис. 7.

Радиационные пояса Земли - это области земной магнитосферы, в которых магнитное поле Земли удерживает заряженные частицы - протоны, электроны, α - частицы, ядра химических элементов и т.п. Конфигурация силовых линий магнитного поля

Земли (почти совпадающая с полем магнитного диполя) создаст для заряженных частиц магнитную ловушку (см. рис. 8) Неоднородность магнитного поля приводит также к медленному поперечному смещению - дрейфу ведущего центра винтовой траектории частицы (так называется центр винтовой траектории).

Пример 2.12. *Определить скорость дрейфа ведущего центра нерелятивистской заряженной частицы в слабом однородном магнитном поле.*

Рассмотрим сначала случай движения по круговой орбите. Представим радиус-вектор частицы $\vec{r}$ в виде суммы двух векторов: $\vec{r} = \vec{R}(t) +$

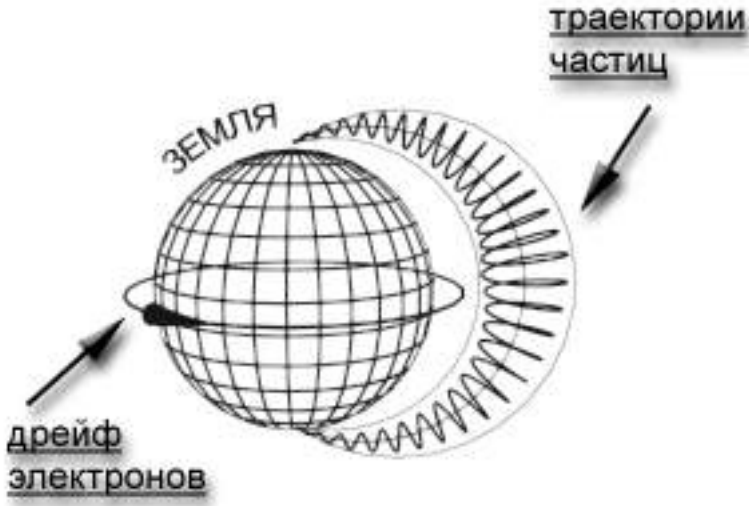


Рис. 8.

$\vec{\xi}(t)$, где $\vec{R}$ - вектор, определяющий движение ведущего центра, а $\vec{\xi}$ - вектор, определяющий быстрое вращение частицы вокруг ведущего центра. Усредним силу, действующую на частицу $e[\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})]/c$ по периоду кругового движения. При этом учтем, что поле меняется слабо $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{R}) + (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}(\vec{R}) + \dots$. При усреднении члены первого порядка по $\vec{\xi}$ обращаются в нуль, а члены второго порядка приводят к появлению дополнительной силы $\vec{f} = e\langle [\vec{\xi} \times (\vec{\xi} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}] / c \rangle$. Так как для кругового движения $\dot{\vec{\xi}} = \omega[\vec{\xi} \times \vec{n}]$, $\xi = v_{\perp}/\omega$, $\vec{n} = \vec{B}/B$, $\omega = eB/mc$ - угловая скорость вращения частицы. Среднее значение произведения компонент вектора $\vec{\xi}$, вращающегося в плоскости перпендикулярной к $\vec{n}$ есть: $\langle \xi_{\alpha} \xi_{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \xi^2/2$, в результате [4]:

$$\vec{f} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \left[[\vec{n} \times \vec{\nabla}] \times \vec{B} \right] = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \left[-\vec{n} \operatorname{div} \vec{B} + \sum_{k=0}^3 n_k \vec{\nabla} B_k \right].$$

В силу уравнений электромагнитного поля $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{B} = 0$, имеем:

$$\sum_{k=0}^3 n_k \vec{\nabla} B_k = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + [\vec{n} \times \operatorname{rot} \vec{B}] = (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = B (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{n} + \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla} B)$$

Отсюда поперечная к $\vec{n}$ сила, приводящая к смещению орбиты, равна

$$\vec{f}_{\perp} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \vec{n} = \frac{mv_{\perp}^2}{2\rho} \vec{\nu}$$

где ρ – радиус кривизны силовой линии поля, $\vec{\nu}$ – единичный вектор, направленный от центра кривизны. Если частица движется ещё и вдоль $\vec{n}$ со скоростью $(\vec{v}_{\parallel})$, то можно использовать приведенное решение, если перейти к системе отсчета вращающейся вокруг мгновенного центра кривизны силовой линии с угловой скоростью $v_{\parallel}/\rho$. В результате в этой системе появляется дополнительная поперечная сила (центробежная сила), равная $\vec{\nu} m v_{\parallel}^2 / \rho$. Таким образом, полная поперечная сила равна:

$$\vec{f}_{\perp} = \vec{\nu} \frac{m}{\rho} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right); \quad \vec{v} = \frac{c [\vec{E} \times \vec{B}]}{B^2}$$

Эта сила и вызывает дрейф ведущего центра со скоростью

$$\vec{v}_d = \frac{1}{\omega \rho} \left(v_{\parallel}^2 + \frac{v_{\perp}^2}{2} \right) [\vec{\nu} \times \vec{n}]$$

УПРАЖНЕНИЯ к гл. 2

1. Какую массу нужно перевести в энергию, чтобы обеспечить годовую потребность России в электроэнергии ($\simeq 10^{13}$ квт.час)?
2. Сколько граммов излучает 100-ватная лампочка за год?
3. Поток мощности от Солнца на Землю $\simeq 1 / ^2$. Сколько грамм вещества переносится на Землю за год (радиус Земли $\simeq 6000$ км).
4. Получить соотношение, связывающее импульс с кинетической энергией и массой покоя m
5. Обычно ускорители на высокие энергии ускоряют частицы массой m до определенной энергии E . Затем эти частицы “бомбардируют” неподвижную мишень, состоящую из частиц той же массы покоя, что и у налетающих частиц. Однако эквивалентный результат может быть достигнут при столкновении двух встречных пучков с более низкой энергией E' . Получить формулу, выражающую энергию E' через E .
 Ответ: $E' = \sqrt{mc^2 (E + mc^2)} / 2$.
6. На реальном ускорителе на встречных протон-протонных пучках достигается энергия пучка $\simeq 30$ ГэВ каждый. Какова должна быть эквивалентная энергия пучка у обыкновенного ускорителя для достижения той же эффективности? $m_p c^2 \simeq 0.938$ ГэВ.

7. На покоящуюся частицу с массой m с момента времени $t = 0$ действует постоянная сила F . Какова скорость этой частицы при $t = \infty$?
8. (Комптоновское рассеяние). Фотон с длиной волны λ “налетает” на покоящийся электрон с массой m и рассеивается с длиной волны λ' под углом θ к первоначальному направлению движения. Вывести соотношение: $\lambda' - \lambda = (1 - \cos \theta) \hbar/mc$.
9. Рассеяние ультрарелятивистской $E \gg mc^2$ заряженной частицы на фотоне называется обратным комптоновским рассеянием. Какова максимальная энергия, которую частица может передать фотону с энергией $\hbar\omega \ll mc^2$? Сколько энергии может передать протон космических лучей с $E \sim 10^{20}$ эВ реликтовому фотону с $T = 3$?
10. Рассмотрим упругое столкновение частицы массы m_1 с покоящейся частицей массой $m_2 < m_1$. Если θ — максимальный угол рассеяния частицы m_1 , то в нерелятивистском приближении $\sin \theta = m_2/m_1$. Доказать, что это верно при любых скоростях движения.
11. До какой максимальной энергии может разогнать электроны циклотрон, работающий на постоянной частоте с ускоряющим потенциалом V ? (Решение см. в [6], задача 2.14).
12. Объяснить принцип работы электронного проектора, электронно-оптического преобразователя, электронного умножителя, электронного осциллографа, электронного микроскопа.
13. Объяснить принцип работы циклотрона, бетатрона.
14. Объяснить принцип работы синхротрона, микротрона, фазотрона, синхрофазотрона.
15. Доказать, что при равномерном движении заряженной частицы в среде с показателем преломления $n(\omega)$ может происходить излучение фотонов (эффект Вавилова-Черенкова). Выразить угол между направлением распространения фотона и направлением скорости частицы через скорость частицы, частоту фотона и показатель преломления. (см. задачу №675 в [8]).

16. Релятивистская частица с зарядом $-q$ и массой m движется в поле неподвижного точечного заряда ze . Найти уравнение траектория частицы. Рассмотреть нерелятивистский предел.

3 РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1 4-х мерные обозначения

Использование 4-х мерных обозначений в электродинамике приводит к определениям следующих важнейших 4-векторов: 4-ток $j \equiv (c\rho, \vec{j})$ и 4-потенциал $A \equiv (\varphi, \vec{A})$. В определении 4-тока ρ - объемная плотность заряда, $\vec{j}$ - плотность тока, c - скорость света, а в определении 4-потенциала φ - скалярный, $\vec{A}$ - векторный потенциалы.

Компоненты напряженностей полей образуют тензор электромагнитного поля, ковариантные компоненты которого определяются равенством:

$$F_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (3.1)$$

Явная запись ко- или контравариантного тензора электромагнитного поля может быть представлена в виде матриц:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{vmatrix}, \quad F^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.2)$$

На основании введенных 4-х мерных обозначений систему уравнений Максвелла в вакууме можно записать либо через 4-ток и 4-потенциал:

$$\square A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad (3.3)$$

либо через тензор электромагнитного поля ($\beta, \lambda, \mu, \nu \in 0, 1, 2, 3$):

$$\sum_{\alpha=0}^3 \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta, \quad \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0. \quad (3.4)$$

Пример 3.1. Доказать, что 4-ток j - есть 4-вектор.

Закон сохранения заряда в дифференциальной форме с учетом определений ∂_μ и j^μ имеет вид: $(\partial \cdot j) = 0$. Так как ∂ - 4-вектор, данное равенство есть скалярное произведение 4-вектора ∂ на 4-вектор j . т. е. j - 4-вектор, и таким образом при преобразованиях Лоренца компоненты этого вектора преобразуются в соответствии:

$$j^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^\mu_\lambda j'^\lambda. \quad (3.5)$$

Пример 3.2. Шар радиуса R заряжен равномерно по объему в собственной системе отсчета до заряда Q . Какова плотность заряда шара, измеренная наблюдателем, относительно которого шар движется со скоростью v .

Из (3.5) находим: $j^0 = \sum_{\lambda=0}^3 \gamma^0_{\lambda} j'^{\lambda}$; т.е. $\rho = \rho' \Gamma(v) = Q\Gamma(v)/(4\pi R^3/3)$.

Пример 3.3. Доказать, что 4-потенциал A есть 4-вектор.

Используя определения 4-тока и 4-потенциала, систему уравнений Максвелла запишем в виде (3.3). Так как $\square$ - инвариант, A - 4-вектор.

Пример 3.4. Найти электромагнитные потенциалы φ и $\vec{A}$ точечного заряда e движущегося со скоростью $\vec{v} = \text{const}$.

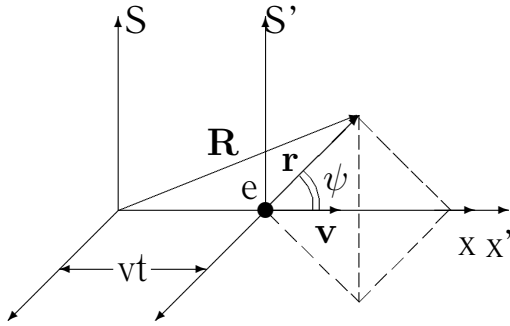


Рис. 9.

В системе S' , связанной с зарядом, потенциалы $\varphi' = e/r'$; $\vec{A}' = 0$. Используя преобразование Лоренца для скалярного потенциала в системе S , найдем: $\varphi = \varphi' \Gamma(v) = e\Gamma(v)/r'$, где: $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \Gamma(v) \sqrt{(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)/\Gamma^2(v)}$. В результате величина φ , выраженная через переменные системы S равна:

$$\varphi = \frac{e}{\sqrt{(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)/\Gamma^2(v)}} = \frac{e}{r} \Gamma(v \sin \psi), \quad (3.6)$$

т. к. $x - vt = r \cos \psi$, $y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \psi$ (см. рис. 9). Соответственно для векторного потенциала получим:

$$A_x = \Gamma(v) \left[A'_x + \frac{v}{c} A'^0 \right] = \frac{v}{c} \varphi = \frac{ev}{cr} \Gamma(v \sin \psi); \quad A_y = A_z = 0. \quad (3.7)$$

Пример 3.5. Доказать, что тензор электромагнитного поля - 4-тензор.

Так как тензор электромагнитного поля (3.1) определяется через 4-векторы ∂ и A , то при преобразовании Лоренца имеем:

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 \left(a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\lambda} \partial'_{\mu} A'_{\lambda} - a_{\beta}^{\lambda} a_{\alpha}^{\mu} \partial'_{\lambda} A'_{\mu} \right) = \sum_{\lambda,\mu=0}^3 a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\lambda} F'_{\mu\lambda},$$

что и является определением 4-тензора (см. (1.21)).

3.2 Законы преобразования электромагнитного поля.

На основании (3.2) и (1.20) или (1.21) легко установить законы преобразования электрического и магнитного полей при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. Если системы сорентированы, как на рис.1, получим:

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & E_y &= \Gamma(v) \left(E'_y + \frac{v}{c} B'_z \right), & E_z &= \Gamma(v) \left(E'_z - \frac{v}{c} B'_y \right), \\ B_x &= B'_x, & B_y &= \Gamma(v) \left(B'_y - \frac{v}{c} E'_z \right), & B_z &= \Gamma(v) \left(B'_z + \frac{v}{c} E'_y \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Несмотря на относительный характер электромагнитного поля из компонент поля можно составить две инвариантные величины:

$$J_1 = 2(B^2 - E^2); \quad J_2 = (\vec{E} \cdot \vec{B}). \quad (3.9)$$

Пример 3.6. Записать формулы преобразования (3.8) в векторном виде.

Введем в рассмотрение составляющие векторов поля параллельные и перпендикулярные скорости относительного движения $\vec{v}$:

$$\vec{E}_{\parallel} = \frac{\vec{v}}{v} \left(\vec{E} \frac{\vec{v}}{v} \right), \quad \vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} = \vec{E} - \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{E} \cdot \vec{v}).$$

Аналогично для вектора индукции $\vec{B}$. Как следует из (3.8):

$$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel}, \quad \vec{E}_{\perp} = \Gamma(v) \left\{ \vec{E}' - \frac{1}{c} [\vec{v} \cdot \vec{B}'] \right\}_{\perp},$$

(также и для $\vec{B}$). В результате, например, для вектора $\vec{B}$ получим:

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} = \vec{B}'_{\parallel} + \Gamma(v) \left\{ \vec{B}'_{\perp} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}']_{\perp} \right\}$$

или окончательно:

$$\vec{B} = \Gamma(v) \left\{ \vec{B}' + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}'] \right\} + \{1 - \Gamma(v)\} \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{B}'). \quad (3.10)$$

Соответственно для вектора $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \Gamma(v) \left\{ \vec{E}' - \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}'] \right\} + \{1 - \Gamma(v)\} \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{E}'). \quad (3.11)$$

Пример 3.7. Найти поле точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью $\vec{v}$.

Используя (3.6) и (3.7), находим дифференцированием:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } \varphi = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) e \frac{\vec{r}}{r^3} \Gamma^3(v \sin \psi).$$

Соответственно для вектора индукции:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{E}] = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) e \frac{[\vec{v} \times \mathbf{r}]}{r^3} \Gamma^3(v \sin \psi).$$

Решить задачу другим способом.

Пример 3.8. Доказать, что при $(\vec{B} \cdot \vec{E}) + (B^2 - E^2) \neq 0$ всегда найдется преобразование Лоренца, переводящее $\vec{B}$ и $\vec{E}$ в параллельные векторы $[\vec{E}' \times \vec{B}'] = 0$ (Указание: рассмотреть векторы $\vec{v} = \alpha [\vec{E} \times \vec{B}]$ и подобрать коэффициент α).

Пусть $\vec{v} = \alpha [\vec{E} \times \vec{B}]$. Тогда на основании (3.8) - (3.11) имеем:

$$E' \Gamma^{-1}(v) = (1 - \alpha B^2) + \alpha (\vec{E} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{B}$$

$$B' \Gamma^{-1}(v) = (1 - \alpha E^2) + \alpha (\vec{E} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{E}.$$

1. Если $(\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0$ и $E = B$, то векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ невозможно сделать параллельными (объяснить почему).

2. Если $(\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0$, но $E^2 \neq B^2$. Выбрав

$$\alpha = \frac{c}{2E^2 B^2} \left[E^2 - B^2 + \sqrt{(B^2 - E^2)^2 + 4E^2 B^2} \right],$$

можно получить параллельность векторов.

3. Если $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$, то коэффициент α должен удовлетворять следующему соотношению: $\alpha \left[(\vec{E} \cdot \vec{B})^2 - E^2 B^2 \right] = 1 - \alpha (E^2 + B^2)$, тогда:

$$\frac{\vec{v}}{c(1 + v^2/c^2)} = \frac{\alpha [\vec{E} \times \vec{B}] / c}{1 + \alpha^2 [\vec{E} \times \vec{B}]^2 / c^2} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{E^2 + B^2}.$$

3.3 Эффект Доплера.

Эффектом Доплера называют явление изменения частоты колебаний (или длины волны λ), воспринимаемой наблюдателем, при движении источника колебаний и наблюдателя относительно друг друга. Эффект Доплера имеет чисто кинематическое происхождение. С точки зрения СТО эффект Доплера для плоских волн вида $A e^{(-i\varphi)} = A \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$

есть следствие инвариантности 4-скаляра $\varphi = \sum_r k^\mu x_\mu = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ при преобразованиях Лоренца. Здесь k^μ - компонента 4-волнового вектора $k \equiv (\omega/c, \vec{k})$, x - 4-координата, $\vec{k}$ - волновой вектор, $|\vec{k}| = \omega/c$. В результате закон преобразования 4-волнового вектора есть:

$$k^\mu = \sum_{\lambda=0} \gamma^\mu_{\lambda} k'^{\lambda}. \quad (3.12)$$

Наиболее часто используется следующая форма записи эффекта Доплера:

$$\omega = \frac{\omega' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v \cos(\theta)/c}, \quad (3.13)$$

где ω' - частота источника в собственной системе отсчета, ω - частота, воспринимаемая наблюдателем, θ - угол между вектором $\vec{k}$ и $\vec{v}$ (скорость относительного движения). При $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ наблюдается **продольный** эффект Доплера, а при $\theta = \frac{\pi}{2}$ **поперечный** эффект, который связан с чисто релятивистским эффектом замедления времени и не имеет никакой волновой специфики.

Эффект Доплера проявляется в широком классе физических явлений и имеет самые разнообразные применения. Например, в астрофизике, проявление эффекта Доплера в наблюдаемых спектрах излучения астрофизических объектов позволяет в ряде случаев определить расстояние до источника излучения от Земли (особенно для источников, движущихся с большими скоростями). В этом случае используется закон Хабла:

$$v = H \cdot R, \quad (3.14)$$

где v - скорость объекта, H - постоянная Хабла, $H \simeq 2.5 \cdot 10^{-18} c^{-1}$, R - расстояние до излучающего объекта.

Пример 3.9. *С какой скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы его водитель принял красный сигнал светофора за зеленый?*

Длина волны красного света $\lambda \simeq 7000$ ангстрем, зеленого $\lambda \simeq 5000$ ангстрем. Так как источник красного света движется на наблюдателя, то в соответствии с (3.13) имеем:

$$\frac{1}{7000} = \frac{1}{5000} \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c}; \quad \frac{25}{49} = \frac{1 - v/c}{1 + v/c}, \quad \dots \quad v = \frac{c}{3}.$$

Пример 3.10. *В начале 1982г. в созвездии Стрельца был зарегистрирован квазар (звездная система, излучающая как целая*

галактика, энергия излучения $\approx 10^{47}$ эрг/сек регистрирующаяся как звезда–квазизвезда), для которого красное смещение $z = (\lambda - \lambda)/\lambda$ оказалось равным $z = \sqrt{24} - 1$. Определить расстояние до этого объекта и его скорость.

На основании (3.13) $z = \sqrt{(c+v)/(c-v)} - 1$. Отсюда $v = 0.92c$. Это самая большая скорость, зарегистрированная в астрономии. На основании закона Хаббла расстояние до этого объекта равно:

$$R = \frac{0.92}{2.5 \cdot 10^{-18}} = 10^{28} \text{ см} = 10^{26} \text{ м} \simeq 1.2 \cdot 10^{10} \text{ свет.лет.}$$

Т. е. сейчас до нас дошел свет, испущенный этим объектом ~ 12 миллиардов лет назад. Для сравнения отметим, что возраст вселенной 13–15 миллиардов лет!

Пример 3.11. Доказать, что при условии $v \ll c$ (v – скорость движения источника излучения) выражение (3.13) в случае продольного эффекта Доплера совпадает с выражением, рассчитанным в рамках механики Ньютона, и отличается для поперечного эффекта.

1. Продольный эффект. Получим формулу для изменения частоты излучения в рамках механики Ньютона. Пусть в момент времени $t'_1 = t_1$ по часам системы S' (рис.1) в начале координат S' происходит вспышка света. Наблюдатель, находящийся в начале координат S , регистрирует эту вспышку в момент времени $t_1 = t'_1 + vt'_1/c = t'_1(1 + v/c)$. Вторую вспышку, произошедшую в системе S' в момент $t'_2 = t_2$, наблюдатель регистрирует в $t_2 = t'_2(1 + v/c)$. Интервал времени между вспышками в S' : $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ и зарегистрированный наблюдателем $\Delta t = t_2 - t_1$ в S связаны соотношением: $\Delta t = \Delta t'(1 + v/c)$. Отсюда для периодического процесса с периодом T' имеем: $T = T'(1 + v/c)$, а для частот: $\omega = \omega'/(1 + v/c)$. Из формулы (3.13) (в которой $\theta = \pi$) следует такое же выражение с точностью до членов $\sim v^2/c^2$.

2. Поперечный эффект $\theta = \pi/2$ в механике Ньютона полностью отсутствует. В СТО на основании (3.13) имеем: $\omega \simeq \omega'(1 - v^2/2c^2)$. Таким образом, так как поперечный эффект есть только в СТО, поэтому этот эффект может служить проверкой принципов СТО. Справедливость формулы (3.13) была экспериментально доказана в опытах Айвза и

Стилвела в 1938 г. (см. подробнее в [2]).

Пример 3.12. Вывести формулу (3.13).

Будем рассуждать аналогично примеру (3.11). Тогда вспышку в момент времени t' в S' наблюдатель в S зарегистрирует в момент времени:

$$t_1 = t_1 + \frac{x}{c} = t_1 + \frac{vt_1}{c} = t_1 \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{t'_1 (1 + v/c)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t'_1 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Соответственно для интервалов между двумя вспышками найдем:

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}; \quad \omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}. \quad (3.15)$$

Это продольный эффект, соответствующий красному смещению. Если источник движется на наблюдателя $v \rightarrow -v$, получим фиолетовое смещение:

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}. \quad (3.16)$$

На основании (3.15) и (3.16) следует, что фаза электромагнитной волны $\varphi = kx - \omega t$ - инвариантна и, следовательно, можно ввести 4-волновой вектор $k \stackrel{\text{def}}{=} (\omega/c, \vec{k})$, где $\vec{k}$ - волновой вектор $|\vec{k}| = \omega/c$. Отсюда на основании преобразования Лоренца находим выражение (3.12).

3.4 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

Для описания свойств электромагнитного поля (помимо тензора электромагнитного поля) удобно ввести тензор, получивший название “тензор энергии-импульса”, который в случае вакуума имеет вид:

$$T^\alpha_\rho = \frac{1}{4\pi} \sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{16\pi} J_1 \delta^\alpha_\rho. \quad (3.17)$$

Тензор энергии-импульса удовлетворяет уравнению (закон сохранения энергии и импульса):

$$\sum_{\alpha=0}^3 \partial_\alpha T^\alpha_\rho = -\frac{1}{c} \sum_{\alpha=0}^3 j^\alpha F_{\alpha\rho}. \quad (3.18)$$

Его 16 компонент равны $T^0_0 = -\omega$, $\omega = (E^2 + B^2)/8\pi$ - плотность энергии электромагнитного поля. $T^0_k = g_k = -T^k_0 = [\vec{E} \times \vec{B}]_k/4\pi$, ($k=1,2,3$). g_k - проекция плотности импульса на ось k :

$$-T^i_k \equiv M_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + B^2) \right]. \quad (3.19)$$

M_{ik} - называется тензором натяжений Максвелла. Сила, приложенная к поверхности S в электромагнитном поле, выражается через тензор натяжений Максвелла следующим образом:

$$\mathcal{F}_k = \int_S \sum_{i=1}^3 M_{ik} n_i dS, \quad k \in 1, 2, 3, \quad (3.20)$$

где $\mathcal{F}_k$ - проекция силы на k -ю ось, а $\vec{n}$ - нормаль к поверхности.

Пример 3.13. Заряд Q равномерно распределен по сфере S радиуса R . Найти силу разрывающую сферу на две половины.

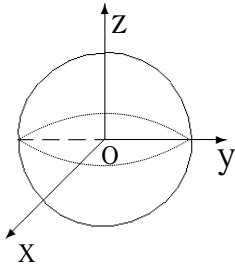


Рис. 10.

Рассмотрим “верхнюю” половину сферы (см. рис. 10). По условию симметрии ясно, что сила направлена по оси z . Из (3.20) имеем:

$$\mathcal{F}_z = \oint [M_{xz}n_x + M_{yz}n_y + M_{zz}n_z] dS. \quad (3.21)$$

Интегрирование в (3.21) проводится по половине сферы и основанию, лежащему в плоскости xy . Известно, что поле вне сферы $r \geq R$ равно $\vec{E} = \frac{Q\mathbf{r}}{r^3}$, а внутри сферы поле равно нулю (на поверхности $E = \frac{Q}{r^2}$). Поэтому при интегрировании по основанию полусферы получим 0, так как тензор натяжений на основании равен 0. Таким образом:

$$\mathcal{F}_z = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta [M_{xz}n_x + M_{yz}n_y + M_{zz}n_z], \quad (3.22)$$

где $n_x = \sin \theta \cos \varphi$, $n_y = \sin \theta \sin \varphi$, $n_z = \cos \theta$. На поверхности сферы для элементов тензора натяжений имеем:

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \frac{1}{4\pi} E_x E_z = \frac{1}{4\pi} E^2 \sin \theta \cos \varphi \cos \theta, \\ M_{yz} &= \frac{1}{4\pi} E_y E_z = \frac{1}{4\pi} E^2 \sin \theta \sin \varphi \cos \theta, \\ M_{zz} &= \frac{1}{4\pi} \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) = \frac{E^2}{8\pi} (2 \cos^2 \theta - 1). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Подставляя (3.23) в (3.22) и выполняя интегрирование, найдем $\mathcal{F}_z = Q^2/8R^2$.

Пример 3.14. Доказать, что тензор энергии-импульса электромагнитного поля удовлетворяет соотношению:

$$\sum_{\alpha=0}^3 T^\mu_\alpha T^\alpha_\nu = \delta^\mu_\nu \left[(E^2 - B^2)^2 + 4 (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 \right] / (8\pi)^2.$$

Так как данное равенство содержит инварианты поля, достаточно показать, что оно выполняется в какой-либо одной системе отсчета.

1. Пусть $E^2 = B^2$ и $(\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0$. Выберем $\vec{E} = \varepsilon \cdot \vec{i}$, $\vec{B} = \varepsilon \cdot \vec{j}$. Тогда отличными от нуля будут лишь компоненты тензора $T^{00} = T^{0z} = T^{zz}$ и, следовательно: $\sum_\alpha T^\mu_\alpha T^\alpha_\nu = 0$.

2. Если $(E^2 - B^2) + (\vec{E} \cdot \vec{B}) \neq 0$. В примере (3.8) показано, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ можно сделать параллельными. Пусть $\vec{E} = E\vec{i}$, $\vec{B} = B\vec{j}$. В результате отличными от нуля будут лишь компоненты тензора энергии-импульса $T^{00} = T^{xx} = T^{yy} = T^{zz}$. В результате

$$\sum_{\alpha=0}^3 T^\mu_\alpha T^\alpha_\nu = \delta_{\mu\nu} \frac{(E^2 + B^2)^2}{(8\pi)^2} = \delta_{\mu\nu} \frac{(E^2 - B^2)^2 + 4E^2B^2}{(8\pi)^2} \quad \text{ч.т.д.}$$

Упражнения к главе 3

1. В некотором электромагнитном поле электрический вектор $\vec{E}$ образует угол θ с вектором магнитной индукции $\vec{B}$, причем угол θ инвариантен для всех наблюдателей. Чему равен θ ?

2. Пусть $(\vec{E} \cdot \vec{B}) = 0$. Доказать, что при $B^2 - E^2 < 0$ существует преобразование Лоренца, обращающее в ноль магнитное поле, а при $B^2 - E^2 > 0$, обращающее в ноль электрическое поле. Найти скорости движения соответствующих систем относительно лабораторной.

3. Наблюдаемая длина волны хорошо известной спектральной линии в излучении далекой галактики равна 0.5 мкм. Стандартная длина волны этой линии 0.4 мкм. С какой скоростью удаляется галактика? Каково расстояние от нее до Земли?

4. Получить формулу для эффекта Доплера в случае звука.

5. Найти поле равномерно движущегося диполя $\vec{d}$.

6. Найти поле равномерно движущегося магнитного момента $\vec{\mu}$.

7. Два заряда движутся параллельно друг другу со скоростями $\vec{v}$.

Определить силу взаимодействия между ними в системе, относительно которой они движутся.

8. Нейтрон с магнитным моментом $\vec{\mu}$ движется со скоростью $v \ll c$ в кулоновском поле ядра с зарядом q . Найти силу, приложенную к нейтрону (пренебрегая членами $\sim v^2/c^2$).

9. Монохроматическая плоская волна частоты ω падает под углом θ на плоское зеркало, которое движется со скоростью $\vec{v}$ в направлении своей нормали навстречу к волне. Определить угол θ_2 отражения от движущегося зеркала и частоту отраженной волны (решение см. в [7], задача 442).

10. Шар радиуса R однородно заряжен с объемной плотностью ρ . Найти силу, разрывающую шар на две равные половины.

11. Найти величину э. д. с. электромагнитной индукции, возникающей при движении проводника в магнитном поле.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

4.1 “Парадоксы СТО.”

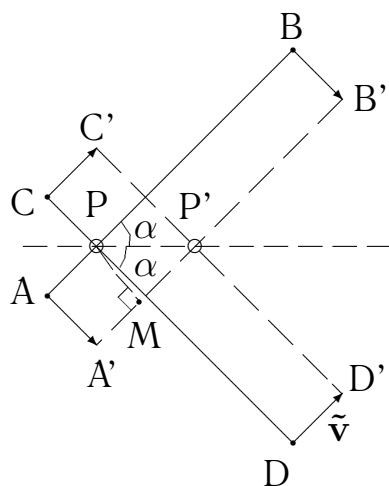


Рис. 11.

Многие выводы СТО кажутся противоречащими нашим обычным (обыденным) наблюдениям. Поэтому СТО подвергалась систематическим нападкам со стороны как профессионалов, так и любителей, “обнаруживших” внутренние противоречия СТО. Обнаруженные противоречия в дальнейшем оказывались мнимыми (кажущимися). Исторически их стали называть парадоксами.

Ниже перечислен ряд “парадоксов” СТО без их объяснения. Обучающемуся предлагается самостоятельно объяснить несостоятельность парадоксальных утверждений.

1. Два стержня (см.рис. 11) AB и CD , расположенные под углом 2α , движутся со скоростями $v = const$, оставаясь параллельными своему первоначальному положению. Определим скорость движения точки пересечения стержней P . Пусть через единицу времени стержни займут положение AB и CD соответственно. Так как

угол BPP' равен углу $PP'M$ (так как $AB \parallel A'B'$), из прямоугольного треугольника PMP' следует, что $PP' = PM/\sin \alpha$. Следовательно, точка пересечения P движется со скоростью $v/\sin \alpha$ и при фиксированном v всегда найдется такое α , что $v/\sin \alpha > c$.

2. Если в предыдущем примере на стержни надеть кольцо, то при движении стержней кольцо можно заставить перемещаться со скоростью больше c (рис 12).

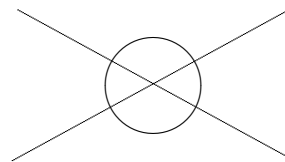


Рис. 12.

3. Рычаг AB имеет ось вращения в т. O ($3 \cdot AO = OB$) (рис 13).

Если заставить двигаться т. A со скоростью больше 100000 км/сек, то точка B будет двигаться со скоростью больше 300000 км/сек.

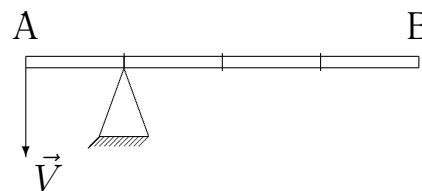


Рис. 13.

4. **Парадокс “зайчика”.** Пусть в центре сферы большого радиуса вращается прожектор (лазер). Луч которого попадает на поверхность сферы, образуя “зайчик”. За один оборот прожектора “зайчик” описывает на сфере дугу, длина которой $2\pi R$. Если период вращения T (ω - частота), то скорость движения “зайчика” $v = 2\pi R/T = 2\pi\omega$ можно сделать больше c . Как это согласуется со СТО?

5. **Вариант парадокса “зайчика”.** В электронных трубках луч движется по экрану со скоростью 10000 км/сек. Если увеличить расстояние от катода до экрана в 50 раз, то скорость перемещения луча по экрану составит 500000 км/сек, что больше c !

6. **Парадокс “транспортера”.** Приведем транспортер в действие так, чтобы скорость движения ленты приблизилась к световой (рис 14). Тогда длина горизонтальных частей ленты сократится: $l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$, хотя расстояние между центрами шкивов A и B на станине остается прежним. Следовательно, в ленте возникает напряжение, которое можно обнаружить динамометром. Если же систему отсчета связать с лентой,

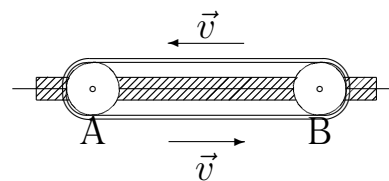


Рис. 14.

то покоящейся будет лента, а станина движется с большой скоростью. Тогда должно сократиться расстояние AB , что приведет к провисанию ленты!

То есть одно и то же явление в разных системах отсчета привело к взаимоисключающим результатам. Это противоречит СТО.

7. Парадокс “колеса”. Пусть есть неподвижное колесо. Приведем его в быстрое вращение относительно т. O . При этом участки обода AB , BC , HA сокращаются, тогда как “радиальные” спицы сохраняют свою длину. То есть при неизменной длине диаметра длина окружности уменьшится в $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ раз (рис 15).

Если, например, скорость такова, что $\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq 10$, то окружность станет приблизительно втрое! короче своего диаметра!!, то есть прямая перестанет служить кратчайшим расстоянием между точками.

8. Парадокс “близнецов”. См. пример (1.5).

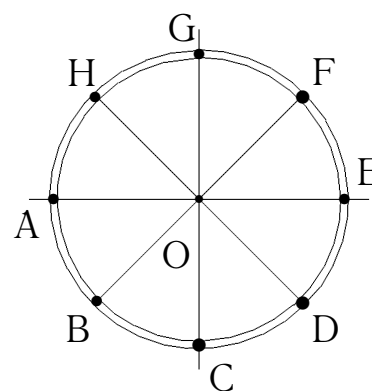


Рис. 15.

Список литературы

- [1] Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. *Классическая электродинамика*. М.: Наука, 1985. 399 с.
- [2] Ансельм А.И. *Очерки развития физической теории в первой трети XX века*. М.: Наука, 1986, 244 с.
- [3] Борн М. *Эйнштейновская теория относительности*. М.: Мир, 1972, 386 с.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. М.: Наука, 1970, 280 с.
- [5] Соколовский Ю.И. *Начала теории относительности*. М.: Просвещение, 1979, 159 с.
- [6] *Сборник задач по теории относительности и гравитации.* / А.Лайтман, В.Пресс, Р.Прейс и др., М.: Мир, 1979, 535 с.
- [7] Алексеев А.И. *Сборник задач по классической электродинамике*. М.: Наука, 1977, 317 с.

- [8] Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. *Сборник задач по электродинамике*. М.: Наука, 1970, 503 с.

Составитель: Запрягаев Сергей Александрович.

Редактор: Бунина Т.Д.