§ 1 Основы специальной теории относительности

Из системы уравнений Максвелла вытекает, что электромагнитное поле распространяется со скоростью, которая получила название **скорость света** $c \approx 300000$ км/сек. Естественно возникает вопрос, в какой системе координат измеряется эта величина. Основываясь на принципах классической механики, в системе координат, которая движется относительно заданной системы с некоторой скоростью v в направлении движения света, должен выполняться классический закон сложения скоростей и в этой движущейся системе скорость света должна быть $c + v$. Однако проведенные экспериментальные исследования установили, что скорость света не зависит от скорости источника излучения. Кроме того на основе опыта и традиций классической механики необходимо было ответить на вопрос как, в какой среде передается электромагнитное излучение.

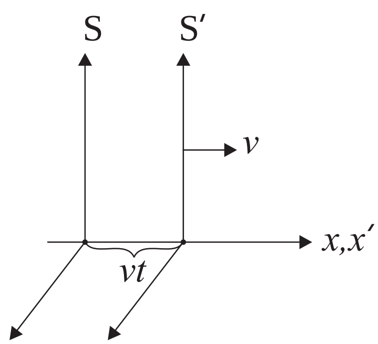

Рис. 1:

Механистическое толкование явлений, связанных с электромагнитным полем на первом этапе привело к понятию эфира, как механической среды и абсолютной, выделенной системы координат в которой распространяются поперечные электромагнитные волны. Исследования такой модели привели к необходимости приданию эфиру совершенно противоречивых свойств для объяснения различных физических явлений. Так, для объяснения явления абберации звезд, необходимо было считать, что эфир абсолютно не взаимодействует с обычным веществом и при движении вещества им не увлекается. Опыты Физо по измерению скорости света в движущейся жидкости показывали, что если использовать понятие эфира, то при движении вещества (жидкости) эфир увлекается средой, но не полностью, а лишь частично, по определенному закону. Наконец, для объяснения опытов Майкельсона-Морли необходимо было предположить, что эфир полностью увлекается движущейся средой. В результате стало понятно, что понятие эфир не способно адекватно описать наблюдаемые явления и требуется предложить иной подход рассмотрения явлений, связанных с электромагнитным полем, не основанный на первых принципах классической механики.

Принцип относительности Галилея

Одним из краеугольных принципов классической механики являлся принцип относительности, который требовал инвариантности уравнений движения относительно преобразований Галилея. Данные преобразования связывают координаты и время двух, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью систем координат. Если для простоты выбрать системы координат, как это указано на рис. (1), то преобразования Галилея для декартовых координат и времени произвольной точки имеют вид:

$$x = x' + v\,t'; \qquad y = y'; \qquad z = z'; \qquad t = t'. \tag{1}$$

Очевидно, что данные преобразования основаны на простейших геометрических представления о пространстве и, что принципиально важно, на принципе абсолютности времени. Этот принцип означает, что время во всех системах координат одно и тоже - абсолютно. Эти интуитивные представления, возникшие в классической механике, как отражение простейших механических наблюдений, господствовавшие в физике на протяжении нескольких столетий и оказались не соответствующими реальной картине окружающего нас мира.

Постулаты Эйнштейна.

Эйнштейном в 1905 году была сформулирована иная теория свойств пространства и времени, получившая название *специальная теория относительности*, которая основывается на двух постулатах:

1) При равных условиях все явления протекают одинаково в инерциальных системах отсчета - **специальный принцип относительности**.

2) Во всех инерциальных системах отсчета скорость света имеет одно и то же значение равное c -*принцип постоянства скорости света*.

Как ни странно, эти два постулата позволили объяснить все известные в то время явления, связанные с электромагнитным полем, не привлекая понятия эфира. По смыслу, специальный принцип относительности как бы не сильно отличается от формулировки принципа относительности Галлилея, однако полностью отказывается от введения понятия абсолютного времени. Соответственно принцип постоянства скорости света был положен Эйнштейном в основу теории, как отражение точно установленного экспериментального факта.

Конечно, формулировка нового принципа относительности означала, что классическая механика Ньютона, которая длительное время была мерилом понятия науки, нуждается в пересмотре, так как меняются ее основные принципы. Это привело к длительному неприятию специальной теории относительности и борьбы с ней по всем направлениям. Тем не менее предсказания этой теории были экспериментально подтверждены в 1935 году в экспериментах по изучению поперечного эффекта Доплера и в настоящее время представления о пространстве - времени, которые оказались заложенными специальной теорией относительности, не вызывают сомнения в области применимости этой теории. В дальнейшем специальная теория относительности была обобщена общей теорией относительности, выводы которой изучается и по настоящее время.

Система отсчета

Трудность освоения специальной теории относительности состоит в том, что она использует первичные понятия, представления о которых сформировано классической механикой. В постулатах Эйнштейна необходимо обратить внимание на такие "безобидные" понятия, как система отсчета и инерциальная система отсчета. В общем случае понятие "система отсчета" есть идеализация понятия об абсолютно твердом теле, состоящем из некоторых "опорных точек", расстояние между которыми постоянно. В классической механике принято считать, что инерциальная система отсчета - это такая система "опорных точек", в которой материальная точка, не взаимодействующая с другими телами, движется равномерно и прямолинейно или покоится.

Синхронизация часов.

В рамках специальной теории относительности за инерциальными системами отсчета закрепляется более широкое понятие. А именно, в пределах каждой инерциальной системы определяется (устанавливается) свое единое время и более того это время является внутренним свойством системы. Фактически это утверждение следует из первого постулата Эйнштейна, который исключил понятие абсолютности времени. Как установить или определить это единое время в конкретной системе координат? Ответ на этот вопрос вытекает из второго постулата Эйнштейна, например на основе мысленного эксперимента, который называется "синхронизацией часов".

Упрощенно эту процедуру можно представить следующим образом. Пусть в некоторой точке A имеются обыкновенные часы, отражающие привычный способ фиксации времени. И пусть наблюдатель из точки A в момент времени t_0 по часам A посылает световой сигнал наблюдателю в точку B, находящуюся на расстоянии l от A. В данной инерциальной системе отсчета расстояние определяется простым сравнением этого отрезка с эталоном длины. Тогда очевидно, что наблюдатель B зарегистрирует этот сигнал в момент времен $t_0 + l/c$ и, таким образом он сможет установить на своих часах время, совпадающее со временем на часах A. Естественно, что наблюдатели должны договориться заранее о том в какой момент времени будет испущен сигнал в точке A.

Формально эту процедуру синхронизации часов можно повторить для произвольной точки системы координат и таким образом установить единое для данной системы координат время.

Лоренцева система координат.

В результате за каждой точкой пространства выбранной системы координат закрепляются четыре величины: три пространственные координаты x, y, z и время данной системы координат t. В соответствии с предложенной идеологией данной точке в другой инерциальной системе координат будут соответствовать свои четыре величины $x^{'}, y^{'}, z^{'}, t^{'}$. Исторически такие инерциальные системы координат называются **Лоренцевскими**.

Свойства пространства - времени.

Как видно, в теории относительности первичными понятиями являются понятия "пространства" и "времени" - категории, обозначающие основные формы существования материи и поля. При этом "пространство" отражает порядок существования объектов, а "время" - порядок смены явлений. В общем случае свойства пространства и времени делят на *метрические*: протяженность, длительность и *топологические*: размерность, непрерывность, связанность, порядок и направление времени.

Теория относительности как специальная, так и общая определяют и изучают метрические свойства пространства и времени. Исследования топологических свойств пространства и времени проводятся в настоящее время и еще не приняли общефизического значения.

Принципиально важно, что понятию свободного пространства приписывается свойства однородности и изотропности, а времени - свойство однородности.

Преобразования Лоренца.

Принцип постоянства скорости света противоречит принципу относительности Галилея, и преобразования Галилея не могут обеспечить его выполнение. Отсюда возникает задача нахождения таких преобразований координат и времени двух инерциальных систем координат, движущихся с постоянной скоростью друг относительно друга, для которых выполняется второй постулат Эйнштейна.

Такие преобразования были найдены Лоренцом и для простейшего случая, когда две системы координат расположены как указано на рисунке (1), движутся вдоль совпадающих осей $x, x^{'}$ и в моменты времени $t = 0 = t^{'}$ начала отсчета этих систем координат совпадали, преобразования координат и времени имеют вид:

$$x = \frac{x^{'} + v\,t^{'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad y = y^{'}; \qquad z = z^{'}; \qquad t = \frac{t^{'} + x^{'}v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2}$$

Соответственно обратные преобразования есть:

$$x^{'} = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad y^{'} = y; \qquad z^{'} = z; \qquad t^{'} = \frac{t - x\,v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{3}$$

Как видно, в частном случае $v \ll c$, преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Кроме того эти преобразования указывают на неразрывную связь понятий, относящихся к геометрическим понятиям пространства и характеристик, определяющих последовательность смены явлений - времени.

§2 Следствия из преобразований Лоренца

Из преобразований Лоренца вытекает несколько следствий, которые демонстрируют ряд важных понятий специальной теории относительности. Рассмотрим некоторые из этих следствий.

Относительность одновременности

Данное следствие является естественным проявлением отказа от постулата об абсолютности времени. Наглядно относительность одновременности можно продемонстрировать на примере двумерной системы отсчета. Рассмотрим для простоты координату x и время t. Введем для удобства координату ct, имеющую, как и x размерность длины.

Изобразим систему координат x, ct в виде двумерной декартовой системы координат (рис. 2). Нарисуем в этой системе координат оси системы координат x', ct'. Очевидно, уравнение оси x' определяется соотношением $t' = 0$. На основании (3) получим уравнение этой оси в переменных системы координат x, ct: $x - vt = 0$ или $ct = x\, v/c$, что является уравнением прямой линии с тангенсом угла наклона $\operatorname{tg}\alpha = v/c$.

Соответственно уравнение оси ct' определяется соотношением $x' = 0$, а на основании (3) в переменных системы координат $ct = xc/v$. Ясно, что это есть уравнение прямой с тангенсом угла наклона к оси ct равным α.

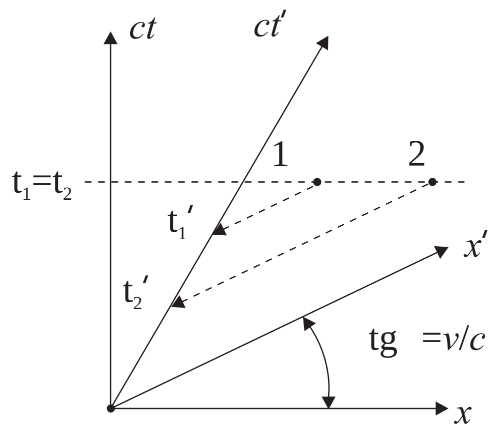

Рис. 2:

В результате на рис. 2 одновременно изображены две лоренцевы системы координат. Очевидно, что одновременные в системе координат x, ct события лежат на линии, параллельной оси x, а в системе координат x', ct' времена событий 1 и 2 определяются линиями, параллельными оси x'. Таким образом, два события A и B, одновременные в системе координат x, ct, не являются одновременными в любой другой инерциальной системе координат, движущейся относительно системы x, ct.

Относительность одновременности

Рассмотрим процесс измерения движущейся линейки. Если для покоящегося объекта процесс измерения длины состоит в сравнении длины объекта с эталоном длины, который можно приложить к измеряемому объекту, то для движущегося объекта процесс измерения должен быть определен какой-то процедурой. По сути эта процедура задается одновременной, с точки зрения покоящегося наблюдателя, отметкой конца и начала движущегося объекта на какой -то покоящейся матрице.

Для наглядности представим себе движущийся поезд. Пусть одновременно, с точки зрения покоящегося на полотне железной дороге наблюдателя, в конец и начало поезда ударяют молнии, которые оставляют следы на рельсах. Тогда, после того как поезд проехал наблюдатель имеет возможность подойти к рельсам и по оставленным молниями отметкам измерить то, что он будет называть длиной поезда.

Однако при этом, если с точки зрения покоящегося на земле наблюдателя молнии ударили в поезд одновременно, то с точки зрения наблюдателя, находящегося в поезде события удара молний в начало и конец поезда произошли не одновременно, поэтому он будет считать, что измерение длины произведено неправильно и его результат - длина поезда, измеренная в собственной системе координат, что можно сделать простым сравнением с эталоном, будет отличаться от результата измерения, полученного наблюдателем на земле.

В общем случае процесс измерения можно описать на языке преобразований начала x_2 и конца x_1 движущейся линейки. На основании (3)

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где учтено, что процесс измерения предполагает одновременную, с точки зрения покоящегося наблюдателя, отметку конца и начала отрезка, то есть $t_2 = t_1$. В полученном выражении $x_2' - x_1' = l_0$ -есть длина линейки в своей собственной системе координат, а $x_2 - x_1 = l$ - результат измерения. Таким образом, измеренная длина l связана с собственной длиной равенством $l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Такое различие результатов называется сокращением длины движущегося объекта, хотя конечно никаких изменений в собственной длине объекта не происходит. Полученное различие является следствием относительности одновременности и способа определения длины движущегося объекта.

Сокращение длины происходит только в направлении движения. В направлениях, ортогональных скорости относительного движения, изменения длин не происходит.

Замедление хода движущихся часов.

Рассмотрим часы, которые движутся со скоростью v в лабораторной системе координат S. Свяжем с часами систему координат $S^{'}$. Запишем преобразования Лоренца для координат и времени этих систем (2) и учтем, что в своей собственной системе координат часы покоятся, то есть $x_1^{'} = x_2^{'}$:

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2^{'} - t_1^{'} + v(x_2^{'} - x_1^{'})/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad \triangle t = \frac{\triangle t^{'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким образом, интервал времени между двумя событиями в собственной системе координат оказывается меньше интервала времени, которое будет зарегистрировано на движущихся часах. Об этом следствии говорят как о замедлении хода движущихся часов.

Закон сложения скоростей.

Пусть в системе координат $S^{'}$ известна кинематическая скорость точки $\mathbf{u}$. По определению величины проекций этой скорости на декартовы оси в системе координат $S^{'}$ равны:

$$u_x^{'} = \frac{dx^{'}}{dt^{'}}; \qquad u_y^{'} = \frac{dy^{'}}{dt^{'}}; \qquad u_y^{'} = \frac{dz^{'}}{dt^{'}}.$$

Найдем проекции скоростей этой точки в системе координат S, относительно которой система координат $S^{'}$ движется с постоянной скоростью v, вдоль положительного направления совпадающих осей $x, x^{'}$. С учетом преобразований Лоренца (2) получим, например, для проекции скорости на ось x:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx^{'} + vdt^{'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \, \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{dt^{'} + vdx^{'}/c^2} = \frac{u_x^{'} + v}{1 + v\,u_x^{'}/c^2}. \tag{4}$$

Аналогичные преобразования для u_y и u_z приводят к следующему результату:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v\,u_x^{'}/c^2}; \qquad u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v\,u_x^{'}/c^2}. \tag{5}$$

Выражения (4), (5) определяют закон сложения скоростей в специальной теории относительности. Как видно, он существенно отличается от классического закона сложения скоростей $u_x = u_x^{'} + v$ только при скоростях сравнимых со скоростями света. Если в выражении (4) положить $u_x^{'} = c$, то результат для u_x остается равным c, что и заложено во втором постулате Эйнштейна.

Инвариантность интервала.

Рассмотрим в системе координат S выражение $s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, которое в специальной теории относительности носит название *квадрата интервала*. Выполним преобразование Лоренца для пространственных и временной переменной в определении квадрата интервала:

$$s^2 = c^2\frac{(t^{'} + x^{'}v/c^2)^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{(x^{'} + vt^{'})^2}{1 - v^2/c^2} - y^{'2} - z^{'2} = c^2t^{'2} - x^{'2} - y^{'2} - z^{'2} = s^{'2}.$$

Таким образом, величина и определение квадрата интервала, а следовательно и интервала s остается постоянной в любой системе координат. Это свойство интервала называется инвариантностью интервала относительно преобразований Лоренца и обозначается $s^2 = \mathrm{invar}$.

Другими словами, несмотря на то что специальная теория относительности указывает на относительность многих классических понятий, ряд величин и понятий остаются инвариантными и не зависят от того в какой системе координат они определяются или измеряются. Такие величины называются *абсолютными* или *инвариантными* относительно преобразований Лоренца. Среди рассмотренных выше понятий к абсолютным относится, кроме интервала, и скорость света.

Еще одна абсолютная величина может быть сформирована из интервала и скорости света и называется *собственным временем*. Очевидно, что из определения интервала следует понятие бесконечно-малого интервала $ds = \sqrt{c^2\,dt^2 - dl^2}$, где $dl = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Вынося cdt из под знака квадратного корня можно переписать полученное выражение следующим образом $ds = cdt\sqrt{1 - v^2/c^2}$, где v -кинематическая скорость точки (а не скорость относительного движения).

В силу инвариантности интервала и абсолютности скорости света, очевидно остается инвариантным и отношение интервала к скорости света: $dt_s = ds/c = \mathrm{invar}$. Эта инвариантная величина и называется собственным временем.

Ниже будет установлено, что в рамках специальной теории относительности имеется большое число инвариантных, относительно преобразований Лоренца, величин, которые играют очень важное значение при исследовании различных физических явлений.

§3 Четырехмерные обозначения в специальной теории относительности

В соответствии с идеологией специальной теории относительности одних пространственных координат недостаточно для описания движения материальных тел. Необходимо еще учитывать в какой системе координат происходит тот или иной процесс. Соответственно каждая система координат снабжена своим способом определения времени. Поэтому даже положение одной точки в пространстве задается набором четырех координат x, y, z, t, а все явления происходят в пространстве и времени. Таким образом, возникает проблема описания явлений в четырехмерном пространстве. Однако понятие многомерного пространства должно быть снабжено правилами и определениями, позволяющими оперировать с основными понятиями четырехмерного мира пространство-время.

Четыре радиус - вектор.

Введем следующие формальные обозначения пространственных и временных переменных для рассмотрения начальных понятий четырехмерного пространства, которые соответствуют обозначениям тензорного анализа.

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \tag{6}$$

И будем называть набор четырех переменных x^μ, $\mu \in 0, 1, 2, 3$ **пространственно - временными координатами мировой точки**. Будем предполагать, что компоненты x^μ составляют проекции четыре-радиус вектора x. Так как в трехмерном пространстве радиус-вектор определяется как контравариантный вектор, то по аналогии и в четырехмерном пространстве положим, что x образует контравариантный вектор (поэтому индекс нумерующий проекции x^μ пишется сверху)

Перепишем преобразования Лоренца, которые установлены для частного случая расположения и относительного движения систем координат S и $S^{'}$ с учетом определений (6):

$$x^0 = \frac{x^{'0} + vx^{'1}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; x^1 = \frac{x^{'1} + vx^{'0}/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad x^2 = x^{'2}, \quad x^3 = x^{'3}. \tag{7}$$

Здесь v - скорость относительного движения систем координат. В результате равенства (7) можно переписать в алгебраическом виде:

$$x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} \gamma^\mu{}_\nu x^{'\nu}, \tag{8}$$

где в частном случае выбора систем координат матрица преобразований γ имеет вид:

$$\gamma^{\mu}{}_{\nu} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Преобразования Лоренца.

В общем случае, если оси систем координат расположены произвольно, γ имеет другой вид. Таким образом, имеется бесконечно много преобразований Лоренца, которые зависят от конкретного расположения осей систем координат.

Формула (8) описывает так называемые однородные преобразования Лоренца, когда в начальный момент времени $t = t' = 0$ начала отсчета систем совпадают. В общем случае неоднородные преобразования Лоренца могут быть записаны следующим образом:

$$x^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \gamma^{\mu}{}_{\nu} x^{'\nu} + b^{\mu}.$$

Покажем теперь, что частный случай преобразования Лоренца есть поворот систем отсчета $S, S^{'}$ в пространстве $x^0 = ct, x^1 = x$ на мнимый угол. Для этого перепишем (6) введя следующие обозначения:

$$\operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \operatorname{sh}\psi = \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \operatorname{ch}^2\psi - \operatorname{sh}^2\psi = 1.$$

В результате получим:

$$x^0 = x^{'0}\operatorname{ch}\psi + x^{'1}\operatorname{sh}\psi, \qquad x^1 = x^{'0}\operatorname{sh}\psi + x^{'1}\operatorname{ch}\psi. \tag{10}$$

Если обозначить $\psi = -i\varphi$, то с учетом соотношений $\operatorname{ch} i\varphi = \cos\varphi$ и $\operatorname{sh} i\varphi = i\sin\varphi$ из (10) получим:

$$x^0 = x^{'0}\cos\varphi + ix^{'1}\sin\varphi, \qquad x^1 = ix^{'0}\sin\varphi + x^{'1}\cos\varphi.$$

Умножим полученное равенство на i и обозначим $ix^0 \equiv x^4$, в результате:

$$x^4 = x^{'4}\cos\varphi - x^{'1}\sin\varphi, \qquad x^1 = x^{'4}\sin\varphi + x^{'1}\cos\varphi. \tag{11}$$

Сравнивая (11) с выражениями, связывающими координаты x, y точки A в двух системах координат, повернутых друг относительно друга на угол φ вокруг начала координат:

$$x_A = x'_A\cos\varphi - y'_A\sin\varphi; \qquad y_A = x'_A\sin\varphi + y'_A\cos\varphi,$$

видно, что эти формулы совпадают. Поэтому преобразования Лоренца - есть поворот на мнимый угол в пространстве (ict, x).

Таким образом, выражение (8) совпадает с определением вектора и можно рассматривать x^{μ} как компоненты 4-вектора x в четырехмерном пространстве-времени по аналогии с 3-х мерным пространством, в котором компоненты радиус вектора удовлетворяют соотношению:

$$x^i = \sum_{k=1}^{3} R^i{}_k\, x^{'k},$$

где R матрица поворота систем координат в трехмерном пространстве.

По аналогии с 3-х мерным пространством введем также ковариантные компоненты 4-радиус вектора. По определению, ковариантные векторы - это векторы, компоненты, которых преобразуются при вращении систем координат как компоненты градиента скаляра $\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$.

Четыре - градиент.

Определим компоненты четыре градиента следующим соотношением $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}$, $\mu \in 0,...,3$. Для определения правил преобразования компонент 4-градиента вычислим производную от скалярной функции $\varphi(x)$, с учетом зависимости $x = x(x^{'})$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \frac{\partial\varphi}{\partial x^{'}\nu} \frac{\partial x^{'\nu}}{\partial x^\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} a_\mu{}^\nu \frac{\partial\varphi^{'}}{\partial x^{'\nu}}, \qquad a_\mu{}^\nu \equiv \frac{\partial x^{'\nu}}{\partial x^\mu} \tag{12}$$

Как видно, определение матрицы a отличается от определения матрицы γ, которая определена на основании формулы $\gamma^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{'\nu}}$. И таким образом должны учитываться различия между ко- и контра-вариантными векторами. Чтобы найти явный вид $a_\mu{}^\nu$ запишем обратное преобразование Лоренца (3) с учетом введенных четырехмерных обозначений.

$$x^{'1} = \frac{x^1 - vx^0/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad x^{'0} = \frac{x^0 - vx^0/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad x^{'\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} b^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{13}$$

где

$$b^\mu{}_\nu \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial x^{'\mu}}{\partial x^\nu}.$$

Следовательно, имеют место равенства $b(v) \equiv a(v) = \gamma(-v)$.

Определим теперь следующие 4 компоненты пространственно временной точки x $x_0 = ct, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z$. Для так определенных компонент преобразования Лоренца имеют вид:

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} a_\mu{}^\nu x^{'}_\nu.$$

что совпадает с законом преобразование компонент 4-градиента. Поэтому x_μ являются ковариантными компонентами 4-радиус вектора.

Ко- и контра- вариантные компоненты.

Таким образом, положение точки в 4-х мерном пространстве-времени задается 4-радиус-вектором x, ко- и контра- вариантные компоненты которого определяются следующим образом:

$$x^\mu \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z) \equiv (ct, \mathbf{r}), \qquad x^\mu \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} \gamma^\mu{}_\lambda x^{'\lambda};$$

$$x_\mu \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3) \equiv (ct, -x, -y, -z) \equiv (ct, -\mathbf{r}), \qquad x_\mu \equiv \sum_{\lambda=0}^{3} a_\mu{}^\lambda x^{'}_\lambda.$$

Используя данные определения, квадрат интервала можно представить следующим образом:

$$S^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3 = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu.$$

Скалярное произведение 4-радиус-векторов.

Таким образом сумма ко- и контра- вариантных компонент 4-радиус вектора остается инвариантной в различных инерциальных системах координат, поэтому выражения вида:

$$\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu,$$

можно интерпретировать как скалярное произведением 4-радиус-векторов, так как такое произведение обладает тем же свойством, что и обычное скалярное произведение в трехмерном пространстве. При этом очевидно, что суммы вида:

$$\sum_{\mu=0}^{3}(x^{\mu})^2; \qquad \sum_{\mu=0}^{3}(x_{\mu})^2$$

не образуют инвариантных величин относительно преобразований Лоренца, а следовательно не могут являться скалярным произведением во вводимом четырехмерном пространстве - времени.

После определения понятий 4-радиус вектора и скалярного произведение 4-радиус векторов можно по аналогии с трехмерным пространством ввести общее понятие 4-вектора.

Четыре - вектор.

4-вектором в рассматриваемом в рамках специальной теории относительности четырехмерном пространстве - времени следует определить набор из четырех функций - компонент вектора, которые при преобразованиях Лоренца удовлетворяют соотношению:

$$A^{\mu} = \sum_{\lambda=0}^{3} \gamma^{\mu}{}_{\lambda}\, A'^{\lambda}; \qquad A_{\mu} = \sum_{\lambda=0}^{3} a^{\lambda}{}_{\mu}\, A'_{\lambda}, \qquad \mu \in 0,1,2,3/ \tag{14}$$

Скалярное произведение 4-векторов.

Для произвольных 4-векторов определение скалярного произведения имеет вид:

$$(A\cdot B) \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu}B_{\mu} \equiv \sum_{\mu=0}^{3} A_{\mu}B^{\mu}.$$

Скалярное произведение двух 4-векторов инвариантно в любой Лоренцевой системе координат. Для доказательства рассмотрим сначала следствие для матриц γ и a, вытекающее из определения инвариантности интервала.

$$\sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu}x_{\mu} = \sum_{\lambda=0}^{3} x'^{\lambda}x'_{\lambda} = \text{invar}. \tag{15}$$

Подставим в левую часть данного равенства формулы преобразования ко- и контра- вариантных компонент векторов, в результате получим:

$$\sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu}x_{\mu} = \sum_{\mu=0}^{3}\left(\sum_{\lambda=0}^{3}\gamma^{\mu}{}_{\lambda}x'^{\lambda}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{3}a_{\mu}{}^{\nu}x'_{\nu}\right) = \sum_{\mu,\lambda,\nu=0}^{3}\gamma^{\mu}{}_{\lambda}\,a_{\mu}{}^{\nu}\,x'^{\lambda}x'_{\nu}. \tag{16}$$

Из сравнения (15) и (16) ясно, что для выполнения равенства (15) необходимо, чтобы:

$$\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}{}_{\lambda}a_{\mu}{}^{\nu} = \delta^{\nu}_{\lambda} \equiv \delta_{\nu\lambda}, \tag{17}$$

где $\delta_{\nu\lambda}$ -символ Кронекера.

Запишем теперь скалярное произведение двух произвольных 4-векторов и перейдем для каждого из векторов в другую инерциальную систему координат, тогда с учетом равенства (17) получим:

$$\sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu}B_{\mu} = \sum_{\lambda,\nu=0}^{3}\left(\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^{\mu}{}_{\lambda}a_{\mu}{}^{\nu}\right)A'^{\lambda}B'_{\nu} = \sum_{\nu=0}^{3}A'^{\nu}B'_{\nu}.$$

Что и доказывает инвариантность скалярного произведения 4-векторов при преобразованиях Лоренца.

Связь ко- и контра- вариантных составляющих 4-векторов может быть представлена в следующем виде: $A^0 = A_0, A^1 = -A_1, A^2 = -A_2, A^3 = -A_3$. Это утверждение следует из того обстоятельства, что: $\gamma(v) = a(-v)$. Перепишем связь ко- и контра- вариантных составляющих 4-векторов следующим образом:

$$A^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} g^{\mu\lambda} A_\lambda, \qquad A_\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} g_{\mu\lambda} A^\lambda.$$

Определенные этим соотношением матрицы преобразований от ко- к контра- вариантным компонентам 4-векторов и наоборот равны между собой и имеют вид:

$$g^{\mu\lambda} = g_{\mu\lambda} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Четыре-тензор.

Имея определение 4-векторов можно аналогично определить тензоры произвольного ранга. В рамках специальной теории относительности прежде всего имеет важное значение тензоры второго ранга. На основе определений, связанных с тензорами второго ранга нетрудно обобщить определения и на тензоры произвольного ранга.

Шестнадцать компонент, преобразующихся при переходе из одной инерциальной системы в другую по закону

$$F^{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\lambda=0}^{3} \gamma^\alpha{}_\mu \gamma^\beta{}_\lambda \, F'^{\mu\lambda} \tag{19}$$

образуют контра- вариантный 4-тензор второго ранга.

Шестнадцать компонент, преобразующиеся по закону

$$F_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\lambda=0}^{3} \gamma_\alpha{}^\mu \, \gamma_\beta{}^\lambda F'_{\mu\lambda}$$

образуют ко-вариантный 4-тензор второго ранга.

Наконец

$$F^\alpha_\beta = \sum_{\mu\lambda=0}^{3} \gamma^\alpha{}_\mu \, a_\beta{}^\lambda F'^\mu_\lambda$$

есть смешанный 4-тензор второго ранга.

Метрический тензор.

Нетрудно убедиться, например, что шестнадцать компонент матриц преобразования от ко- к контра- вариантным компонентам и обратно образуют 4-тензор. Пусть, например, матрица линейного преобразования определена в некоторой системе координат S'. Вычислим компоненты этой матрицы преобразования в системе координат S. Так для компоненты g^{00} получим:

$$g^{00} = \sum_{\mu,\lambda=0}^{3} \gamma^0{}_\mu \gamma^0{}_\lambda \, g'^{\mu\lambda} = \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^0{}_\mu (\gamma^0{}_0 g'^{\mu 0} + \gamma^0{}_1 g'^{\mu 1} + \gamma^0{}_2 g'^{\mu 2} + \gamma^0{}_3 g'^{\mu 3}) = 1.$$

Аналогично вычисляются и другие компоненты: $g^{11} = -1$, $g^{22} = -1$, $g^{33} = -1$, $g^{\alpha\beta} = 0$, если $\alpha \neq \beta$. Другими словами $g^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta}$. Таким образом для шестнадцати компонент $g^{\alpha\beta}$ выполняется соотношение

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\lambda=0}^{3} \gamma^\alpha{}_\mu \, \gamma^\beta{}_\lambda g'^{\mu\lambda},$$

что совпадает с определением контра- вариантного 4-тензора, поэтому $g^{\alpha\beta}$ и есть 4-тензор. То же самое относится и к $g_{\alpha\beta}$ и g^{α}_{β}. Тензор g называется метрическим тензором. С помощью метрического тензора производится опускание и поднятие индекса у любого 4-тензора или 4-вектора.

$$A^{\mu} = \sum_{\lambda=0}^{3} g^{\mu\lambda} A_{\lambda}, \qquad F^{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=0}^{3} g^{\alpha\lambda}\, F^{\beta}_{\ \lambda} = \sum_{\lambda,\mu=0}^{3} g^{\alpha\lambda}\, g^{\beta\mu}\, F_{\lambda\mu}$$

$$A_{\mu} = \sum_{\lambda=0}^{3} g_{\mu\lambda}\, A^{\lambda}, \qquad F_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=0}^{3} g_{\alpha\lambda}\, F^{\lambda}_{;\ \beta} = \sum_{\lambda,\mu=0}^{3} g_{\alpha\lambda}\, g_{\beta\mu}\, F^{\lambda\mu}$$

С использованием определения метрического тензора квадрат интервала можно переписать в виде:

$$S^2 = \sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu} x_{\mu} = \sum_{\mu,\lambda=0}^{3} g^{\mu\lambda}\, x_{\mu}\, x_{\lambda} = \sum_{\mu\lambda=0}^{3} g_{\mu\lambda}\, x^{\mu}\, x^{\lambda}. \tag{20}$$

Формула (20) поясняет, почему $g^{\alpha\beta}$ называется метрическим тензором: он позволяет определить инвариантное расстояние между двумя точками в четырехмерном пространстве-времени или, как это принято называть в геометрии математических пространств, установить метрику этого пространства.

С использованием метрического тензора, скалярное произведение двух 4-векторов запишется следующим образом:

$$(A \cdot B) = \sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu} B_{\mu} = \sum_{\mu,\lambda=0}^{3} g^{\mu\lambda} A_{\lambda} B_{\mu} = \sum_{\mu,\lambda=0}^{3} g_{\mu\lambda} A^{\mu} B^{\lambda}.$$

Пространство Минковского.

Можно отметить, что в современной геометрии используется понятие псевдоевклидова пространства, обозначаемого как $R^n_{p,q}$, где $p + q = n$. Данное пространство определяется как n - мерное пространство с координатами x^1, ..., x^n в котором квадрат длины вектора $\xi = (\xi^1, ..., \xi^n)$ задается формулой:

$$|\xi|^2 \equiv <\xi, \xi> = \sum_{i=1}^{p} (\xi^i)^2 - \sum_{i=1}^{q} (\xi^{p+i})^2.$$

При $n = 4$, $p = 1$, как видно получаем пространство-время специальной теории относительности или пространство Минковского $R^4_{1,3} \equiv R^4_1$.

В соответствии с введенными выше определениями очевидны следующие обозначения и определения:

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \equiv (\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \equiv (\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla) = (\partial_0, \nabla) \tag{21}$$

– ковариантный 4-градиент; $\partial^{\mu} \equiv (\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla) = (\partial^0, -\nabla)$ - контра- вариантный 4-градиент; $\frac{\partial \phi}{\partial x^k} = \partial_k \varphi$ - ковариантный 4-вектор, если φ - скаляр; $\partial_{\nu} A^{\mu}$; - 4-тензор; $\sum_{\mu=0}^{3} \partial_{\mu} A^{\mu}$ - 4-дивергенция. $-\sum_{\mu=0}^{3} \partial^{\mu} \partial_{\mu} = \Box$ - оператор Д'Аламбера. $\Box\varphi$ -скаляр, $\Box A^{\mu}$ 4-вектор.

§4 Кинематические определения в четырехмерном пространстве. 4-скорость. 4-ускорение.

В четырехмерном пространстве - времени специальной теории относительности вводится несколько кинематических определений для описания движения мировой точки.

4-скорость.

Так, определение 4-скорости имеет вид:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt_s},$$

где $dt_s = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ - собственное время. Как следует из определения 4-скорости, 4-скорость -есть 4-вектор. Это следует из того, что dx^μ -есть 4-вектор, а dt_s - инвариантная величина. Вычисления компонент 4-скорости приводят к следующему их явному виду:

$$u^\mu \equiv \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right); \qquad u_\mu \equiv \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, -\frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right).$$

В силу того, что 4-скорость есть 4- вектор, очевидно, что квадрат 4-скорости - инвариантная величина

$$(u \cdot u) = \sum_{\mu=0}^{3} u^\mu\, u_\mu = \frac{c^2}{1 - v^2/c^2} - \frac{v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2 = \text{invar}.$$

В силу того, что 4-скорость -есть 4-вектор, закон преобразования ее компонент при переходе из одной инерциальной системы к другой имеет вид:

$$u^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \gamma^\mu{}_\lambda(v) u'^\lambda.$$

В результате, например, для специального случая выбора систем координат при их относительной скорости движения V, получим:

$$u^1 = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} u'^0 + \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} u'^1;$$

или

$$\frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{c}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{v'_x}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}},$$

здесь v -скорость движения точки в системе координат S, v' -скорость движения точки в системе координат S', а V - скорость относительного движения систем координат друг относительно друга. Тождественные преобразования последнего выражения приводят к закону сложения скоростей. (привести вывод)

4-ускорение.

Производная от 4-скорости по собственному времени называется в кинематике специальной теории относительности 4-ускорением:

$$w^\alpha \equiv \frac{du^\alpha}{dt_s}.$$

Явный вид компонент 4-ускорения есть:

$$w^\alpha \equiv \left(\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{1 - u^2}^2; \frac{\mathbf{a}}{1 - u^2} + \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{1 - u^2}^2\right).$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt}; \qquad \mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}; \qquad \mathbf{u} \equiv \frac{\mathbf{v}}{c};$$

Из определения 4-ускорения следует, что 4-ускорение есть 4-вектор. То есть, в соответствии с общим определением 4-векторов правила преобразования компонент 4-ускорения определяются матрицей преобразования Лоренца. Квадрат 4-ускорения и произведения 4- ускорения на 4-координату или 4-скорость - инвариантные величины в Лоренцевских системах отсчета. Скалярное произведение 4-ускорения на 4-скорость равно нулю, поэтому говорят, что 4-скорость ортогональна 4-ускорению. Доказательство ортогональности 4-скорости и 4-ускорения основывается на инвариантности квадрата 4-скорости. Дифференцируя соотношение $u \cdot u = c^2$ по собственному времени получим доказательство условия ортогональности u и w

§5 Релятивистская механика.

Механика Ньютона не удовлетворяет постулатам специальной теории относительности. В соответствии с постулатами специальной теории относительности необходимо построить механику, уравнения которой были бы инвариантны относительно преобразований Лоренца. Такая механика называется **релятивистской**.

В рамках Лагранжевого формализма вывод уравнений движения основывается на использовании функции действия:

$$S = \int_{(1)}^{(2)} L\, dt, \tag{22}$$

где L -функция Лагранжа. Для получения уравнений, инвариантных относительно преобразований Лоренца, необходимо построить функцию действия инвариантную относительно этих преобразований.

Свободная частица.

Рассмотрим, для примера, свободную частицу. При отсутствии каких-либо сил и полей единственная релятивистская инвариантная величина, характеризующая движение частицы из точки 1 в точку 2 в 4-х мерном пространстве является длина ее мировой линии, которая определяется как интеграл от интервала ds. Поэтому действие, удовлетворяющее требованиям специальной теории относительности, можно записать в виде

$$S = \mathrm{const} \int_{(1)}^{(2)} ds = \mathrm{const} \int_{(1)}^{(2)} \frac{ds}{dt}\, dt = \mathrm{const} \int_{(1)}^{(2)} c\sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt, \tag{23}$$

где const — инвариантная постоянная.

Сравнивая полученное выражение с (22), можно установить, что функция Лагранжа свободной частицы должна иметь вид:

$$L = \mathrm{const}\, c\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{24}$$

Так как при $v/c \ll 1$ релятивистская механика должна переходить в механику Ньютона, разложим функцию Лагранжа в ряд по малому параметру v/c. В результате: $L \simeq \mathrm{const}\, c\left(1 - v^2/2c^2 \ldots\right)$. Таким образом, очевидно, что для согласованного предельного перехода, const должна быть выбрана равной $\mathrm{const} = -\mathrm{mc}$, так как функция Лагранжа свободной частицы в механике Ньютона равна $L_n = mv^2/2$ и она определена с точностью до аддитивной постоянной. В результате, релятивистское выражение для функции Лагранжа имеет вид:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Энергия и импульс свободной частицы.

На основе результатов Лагранжева подхода можно определить выражения для импульса и энергии свободной частицы. Так выражение для импульса определяется как градиент от функции Лагранжа по скорости частицы, то есть:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

Соответственно определение энергии в Лагранжевом формализме есть:

$$\varepsilon = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Как видно полученные выражения отличаются от выражений известных в классической механике Ньютона $\mathbf{p}_n = m\mathbf{v}$, $\varepsilon_n = mv^2/2$.

Энергия покоя.

Принципиальным отличием релятивистского выражения для энергии является определение колосальной энергии покоя частицы равное

$$\varepsilon = mc^2$$

. В соответствии с данной формулой, например, в одном грамме вещества энергия покоя равна $\approx\ 10^{14}$ джоулей. Такая величина эквивалентна энергии выделяющейся при сжигании угля в количестве около 10000 тонн - железнодорожный состав с углем из 200 вагонов. Установление связи энергии и массы частицы открыло возможность превращения массы в энергию, которая позднее была реализована в реакциях деления тяжелых ядер и в реакциях слияния легких ядер —термоядерный синтез.

4 — импульс.

Релятивистские выражения для энергии и импульса образуют 4-вектор, который получил название 4-импульс p^μ. Определение 4-импульса связано с определением 4-скорости u^μ следующим соотношением: $p^\mu = m\,u^\mu$, где m -масса покоя частицы.

$$p^\mu = m\,u^\mu \equiv \left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}};\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \equiv \left(\frac{\varepsilon}{c},\mathbf{p}\right); \qquad p_\mu \equiv \left(\frac{\varepsilon}{c},-\mathbf{p}\right)$$

Квадрат 4-импульса является инвариантной величиной равной m^2c^2

$$\sum_{\mu=0}^{3} p_\mu\,p^\mu = \frac{\varepsilon^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2; \qquad \varepsilon^2 = m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2.$$

Уравнения Минковского.

Обобщение уравнений движения частицы, находящихся под действием внешних сил, на релятивистский случай выполнено Минковским. Лоренцевская инвариантность уравнений требует, чтобы физические уравнения имели следующую структуру $A^\alpha = B^\alpha$, $A^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta}\ldots$. Отсюда вытекает следующая возможность обобщения уравнений Ньютона на релятивистский случай:

$$\frac{dp^\alpha}{dt_s} = f^\alpha \qquad \alpha \in 0,1,2,3, \tag{25}$$

где p^α -4 импульс, а $f^\alpha = (f^0,\mathbf{f})$ - 4-вектор, получивший название *4-сила Минковского*. В соответствии с (25) пространственные компоненты 4-силы Минковского равны:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{p}}{dt_s} = \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{f}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \mathbf{F}.$$

В последнем соотношении учтено, что для обеспечения предельного перехода к нерелятивистской механике необходимо положить $\mathbf{F} = \mathbf{f}\sqrt{1-v^2/c^2}$, где $\mathbf{F}$ — обычная сила, определенная в нерелятивистской механике Ньютона.

В силу ортогональности 4-скорости u^μ и 4-ускорения $w^\mu = du^\mu/dt_s$, очевидно, что скалярное произведение 4-скорости и 4-силы Минковского равно нулю, в результате для нулевой компоненты 4-силы Минковского получим выражение $f^0 = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{f})/c$. Таким образом, нулевая компонента уравнения Минковского имеет вид:

$$\frac{dp^0}{dt_s} = f^0; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{1}{c}\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}).$$

В результате уравнения движения для релятивистской частицы могут быть записаны окончательно в виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}), \qquad \mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \varepsilon \equiv \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

§6 Элементарная квантовая теория электромагнитного поля.

Теория Эйнштейна

§7 4-ток. 4-потенциал.

Для рассмотрения вопросов, связанных с определениями специальной теории относительности в рамках электродинамики используем 4-мерные обозначения для характеристик поля и источников поля.

4-ток.

Введем понятие 4-ток, в соответствии со следующим определением: $j^\mu \equiv (c\rho, \mathbf{j}) \equiv (j^0, j^1, j^2, j^3)$, $j_\mu \equiv (c\rho, -\mathbf{j})$, тогда закон сохранения заряда можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0; \qquad \sum_{\mu=0}^{3} \partial_\mu j^\mu = 0; \qquad \sum_{\mu=0}^{3} \partial^\mu j_\mu = 0. \tag{26}$$

Здесь $\partial_\mu = (\partial_0, \vec{\nabla})$, $\partial_0 = \partial^0 = \partial / c\partial t$, $\partial^\mu = (\partial^0, -\vec{\nabla})$ - оператор 4-ко- или 4-контравариантного дифференцирования (4-градиент), являющийся 4-вектором. В силу того, что (26) имеет форму скалярного произведения, а закон сохранения заряда выполняется в любой системе координат, можно сделать важное заключение о том, что определенный выше 4-ток является 4-вектором, то есть его компоненты при преобразованиях Лоренца ведут себя как любой 4-вектор $j^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \gamma^\mu{}_\lambda \, j^\lambda$ и, например, для случая специального выбора систем координат эти преобразования имеют вид:

$$j^0 = \frac{j'^0 + v/c j'^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad j^1 = \frac{j'^1 + v/c j'^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad j^2 = j'^2; \qquad j^3 = j'^3.$$

Очевидно, что плотность заряда ρ — зависит от системы координат $\rho = \rho' / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ и не является инвариантной величиной, в отличие от заряда, который инвариантен во всех системах.

4-потенциал.

Система уравнений Максвелла в вакууме при использовании векторного $\mathbf{A}$ и скалярного φ потенциалов, удовлетворяющих условиям калибровки Лоренца, является системой волновых уравнений:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{A}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \qquad \Rightarrow \qquad \Box \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \qquad \Rightarrow \qquad \Box \varphi = 4\pi\rho,$$

где оператор д'Аламбера $\Box = \sum_{\mu=0}^{3} \partial^\mu \partial_\mu = \Box' = \sum_{\mu=0}^{3} \partial'^\mu \partial'_\mu = \mathrm{invar}$.

Определим понятие 4-потенциала: $A^\mu \equiv (\varphi, \mathbf{A})$, $A_\mu \equiv (\varphi, -\mathbf{A})$. Очевидно, что используя данное определение система уравнений Максвелла в четырех мерных обозначениях примет следующий вид: $\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Полученное уравнение означает, что определенный выше 4-потенциал является 4-вектором, так как с правой стороны равенства стоит величина j^μ, являющийся 4-вектором, а в силу инвариантности оператора $\Box$, следовательно $\Box A^\mu$ - есть 4 - вектор, то есть A^μ-4-вектор. Это означает, что 4-потенциал преобразуется по общему для всех 4-векторов правилу: $A_\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \gamma^\mu{}_\lambda \, A^{\ \lambda}$. Таким образом электромагнитное поле не является инвариантной величиной и зависит от системы координат из которой оно наблюдается.

Второй важный вывод, который следует из 4-мерной записи системы уравнений Максвелла $\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ состоит в том, что эта форма в явном виде показывает инвариантность системы уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. То есть система уравнений для описания электромагнитного поля оказывается исходно удовлетворяющей общим принципам специальной теории относительности. Для доказательства выполним преобразование Лоренца со всеми величинами, входящими в систему уравнений Максвелла в выбранной системе координат $\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu$. В результате получим:

$$\sum_{\lambda=0}^{3} \gamma^\mu{}_\lambda \, [\Box' \, A'^{\,\lambda} - \frac{4\pi}{c} \, j'^{\,\lambda}] = 0; \qquad \Rightarrow \qquad \Box' \, A'^{\,\lambda} = \frac{4\pi}{c} \, j'^{\,\lambda},$$

что и доказывает инвариантность формы записи системы уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца и таким образом удовлетворяет первому постулату специальной теории относительности.

§8 Тензор электромагнитного поля.

Четырехмерная формулировка системы уравнений Максвелла возможна не только с использованием понятия 4-потенциал, но и с использованием непосредственно компонент векторов поля $\mathbf{E}, \mathbf{B}$. С этой целью можно ввести 4-тензор второго ранга, состоящий из компонент поля, который позволяет представить систему уравнений Максвелла в 4-мерном, инвариантном относительно преобразований Лоренца виде. Такой тензор и называется **тензором электромагнитного поля**.

Для его построения воспользуемся определениями скалярного и векторного потенциалов $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. Рассмотрим для примера E_x -компоненту электрического поля. С учетом определения ко- и контра- вариантных составляющих 4-потенциала и 4-радиус-вектора получим:

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} = \partial_0\, A_1 - \partial_1\, A_0.$$

Аналогично для других компонент электрического поля $E_y = \partial_0\, A_2 - \partial_2\, A_0$, $E_z = \partial_0\, A_3 - \partial_3\, A_0$. Из определения ротора векторного потенциала для компоненты магнитного поля B_x находим:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\partial A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2}{\partial x^3} = \partial_3\, A_2 - \partial_2\, A_3.$$

Аналогично для двух других компонент магнитного поля: $B_y = \partial_1\, A_3 - \partial_3\, A_1$, $B_z = \partial_2\, A_1 - \partial_1\, A_2$. Таким образом видно, что компоненты поля выражаются в общем виде следующей комбинацией производных от 4-потенциала $F_{\alpha\,\beta} = \partial_\alpha\, A_\beta - \partial_\beta\, A_\alpha$, $\alpha, \beta \in 0, \ldots, 3$. Очевидно, что шестнадцать компонент $F_{\alpha,\beta}$ образуют 4-тензор, так как являются произведением компонент 4-векторов, то есть при преобразованиях Лоренца удовлетворяют соотношению:

$$F_{\alpha\,\beta} = \sum_{\lambda,\mu=0}^{3} a_\alpha{}^\lambda\, a_\beta{}^\mu F^{'}_{\lambda\,\mu}, \tag{27}$$

где матрица преобразований a связана с матрицей преобразования Лоренца соотношением $a = \gamma(-v)$. Таким образом, $F_{\alpha\,\beta}$ образует ко-варинтный тензор второго ранга, который может быть представлен и в контра-вариантной форме

$$F^{\mu\,\nu} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} g^{\mu\,\alpha} g^{\nu\,\beta} F_{\alpha\,\beta},$$

(g — метрический тензор) и в форме смешанного тензора $F^\mu{}_\nu$ или $F_\nu{}^\mu$ в соответствии с правилами преобразований от ко- к контравариантной форме и обратно. Естественно, что преобразования Лоренца для контра-вариантного и смешанного тензоров имеют вид:

$$F^{\alpha\,\beta} = \sum_{\lambda,\mu=0}^{3} \gamma^\alpha{}_\lambda\, \gamma^\beta{}_\mu F^{'}_{\lambda\,\mu}, \qquad F^\alpha{}_\beta = \sum_{\lambda,\mu=0}^{3} \gamma^\alpha{}_\lambda\, a_\beta{}^\mu F^{\lambda\,'}{}_{\mu}. \tag{28}$$

Свойства тензора электромагнитного поля.

На основании определения тензора электромагнитного поля можно установить его следующие общие свойства:

1. Тензор электромагнитного поля антисимметричен, то есть $F_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\beta}$. Если расположить шестнадцать компонент тензора в виде матрицы размерности 4×4, то это свойство означает, что тензор антисимметричен относительно главной диагонали.

2. $F_{\alpha\alpha}=0$. Если расположить шестнадцать компонент тензора в виде квадратной матрицы, диагональные члены такой матрицы равны нулю.

3. Явный вид тензора вытекает из определения его компонент. Для ко- вариантного и контра-вариантного тензора представленного в виде квадратной матрицы размерности 4×4 получим:

$$F_{\alpha\,\beta}=\begin{vmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & -B_z & B_y\\ -E_y & B_z & 0 & -B_x\\ -E_z & -B_y & B_x & 0\end{vmatrix};\qquad F^{\alpha\,\beta}=\begin{vmatrix}0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ E_x & 0 & -B_z & B_y\\ E_y & B_z & 0 & -B_x\\ E_z & -B_y & B_x & 0\end{vmatrix}.$$

Соответственно для смешанных тензоров (!!! проверить) имеем:

$$F^{\alpha}{}_{\beta}=\begin{vmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ E_x & 0 & B_z & -B_y\\ E_y & -B_z & 0 & B_x\\ E_z & B_y & -B_x & 0\end{vmatrix};\qquad F_{\alpha}{}^{\beta}=\begin{vmatrix}0 & -E_x & -E_y & -E_z\\ -E_x & 0 & B_z & -B_y\\ -E_y & -B_z & 0 & B_x\\ -E_z & B_y & -B_x & 0\end{vmatrix}$$

4. Тензор электромагнитного поля инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\tilde{\mathbf{A}}' \to \mathbf{A}+\operatorname{grad}\chi;\qquad \tilde{\varphi}'\to\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t};\qquad\Rightarrow\qquad A_{\mu}^{'}=A_{\mu}-\partial_{\mu}\,\chi,$$

где χ - произвольная скалярная функция. Доказательство следует из определения:
$\tilde{F}_{\alpha\beta}=\partial_{\alpha}\tilde{A}_{\beta}-\partial_{\beta}\tilde{A}_{\alpha}=\partial_{\alpha}(A_{\beta}-\partial_{\beta}\chi)-\partial_{\beta}(A_{\alpha}-\partial_{\alpha}\chi)=F_{\alpha\beta}$

Система уравнений Максвелла.

Используя определение тензора электромагнитного поля можно представить систему уравнений Максвелла в вакууме в следующем виде:

$$\sum_{\alpha=0}^{3}\partial_{\alpha}\,F^{\alpha\,\beta}=\frac{4\pi}{c}\,j^{\beta}; \tag{29}$$

$$\partial_{\lambda}\,F_{\mu\nu}+\partial_{\mu}\,F_{\nu\lambda}+\partial_{\nu}\,F_{\lambda\mu}=0. \tag{30}$$

Здесь $\beta,\lambda,\mu,\nu\in\ 0,1,2,3$.

Рассмотрим, например, первое из уравнений (29) для случая $\beta=0$

$$\sum_{\alpha}\partial_{\alpha}F^{0\,\alpha}=-\frac{4\pi}{c}\,j^{0};\quad \partial_0F^{00}+\partial_1F^{01}+\partial_2F^{02}+\partial_3F^{03}=-\frac{4\pi}{c}(c\rho).$$

Подставляя явный вид компонент тензора электромагнитного поля и компонент 4-тока получим:

$$-\frac{\partial E_x}{\partial x}-\frac{\partial E_y}{\partial y}-\frac{\partial E_z}{\partial z}=-4\pi\rho\to\operatorname{div}\vec{\mathbf{E}}=4\pi\rho,$$

что соответствует закону Кулона в дифференциальной форме.

Вычисляя явный вид уравнения (29) при $\beta=1,2,3$, получим проекции обобщенного уравнения Ампера на декартовы оси

$$c(\operatorname{rot}\mathbf{B})_k=4\pi\,(\mathbf{j})_k+(dot\mathbf{E})_k,\ k=x,y,z.$$

В силу того, что в одном 4-х мерном уравнении объединились два уравнения системы уравнений Максвелла - закон Кулона и закон Ампера, об этих уравнениях говорят как о первой паре системы уравнений Максвелла.

Аналогично можно получить, что второе из уравнений (29) приводит к закону электромагнитной индукции Фарадея и закону отсутствия магнитных зарядов. Необходимо отметить, что в этом случае, при различных значениях λ, μ, ν имеется 64 уравнения из которых не являются тождественными нулями только четыре уравнения, приводящие ко второй паре системы уравнений Максвелла.

Дуальный тензор.

В заключении отметим, что если ввести тензор четвертого ранга по следующему определению:

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu\rho} = \begin{cases} 1 & (\lambda\mu\nu\rho) \to (0,1,2,3) \text{ четные перестановки} \\ -1 & (\lambda\mu\nu\rho) \to (0,1,2,3) \text{ нечетные перестановки} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях} \end{cases}$$

то произвольный тензор ${}^*F^{\lambda\,\mu}$, который получается вычислением свертки по двум индексам в соответствии с определением:

$${}^*F^{\lambda\,\mu} = \frac{1}{2}\sum_{\nu,\rho=0}^{3} \epsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\, F_{\nu\rho},$$

называется тензором дуальным к тензору второго ранга $F_{\lambda\,\mu}$ или просто дуальным тензором.

С учетом определения дуального тензора к тензору электромагнитного поля, вторую пару уравнений системы уравнений Максвелла вместо выражения $\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$ можно представить в виде похожем на первую пару системы уравнений Максвелла:

$$\sum_{\lambda=0}^{3} {}^*F^{\lambda\,\mu} = 0; \qquad \mu \in 0,1,2,3.$$

§9 Преобразование напряженностей полей. Инварианты поля.

Тензор электромагнитного поля является естественным инструментом для установления связи напряженностей полей в различных системах координат. Формулы (27), (28) позволяют вычислить значения векторов поля, если в какой-то системе координат поле известно.

Преобразование векторов поля.

Рассмотрим, для примера, вычисление компоненты напряженности электрического поля E_x в системе координат S, если поле в системе координат S' известно. Здесь предполагается специальный выбор движения системы координат S' относительно системы координат S со скоростью v вдоль совпадающих осей x. Воспользуемся контравариантным тензором электромагнитного поля, в этом случае преобразования Лоренца приводят к следующему результату:

$$F^{01} \equiv -E_x = \sum_{\mu\,\nu=0}^{3} \gamma^0{}_\mu\, \gamma^1{}_\nu\, F'^{\,\mu\,\nu} = -\frac{E_x'}{1-v^2/c2} + \frac{vE_x'/c}{1-v^2/c^2} = -E_x'$$

Вычисления, полностью аналогичные представленным, для других компонент тензора электромагнитного поля приводят к следующему общему результату:

$$E_x = E_x', \qquad E_y = \frac{E_y' + v\,B_z'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad E_z = \frac{E_z' - v\,B_y'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

$$B_x = B_x', \qquad B_y = \frac{B_y' - v\,E_z'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad B_z = \frac{B_z' + v\,E_y'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Представленные выражения в явном виде демонстрируют тот факт, что электромагнитное поле не является инвариантной величиной и зависит от системы координат в которой оно наблюдается.

Инварианты поля.

Однако из компонент поля могут быть составлены две инвариантные величины, которые не зависят от выбора систем координат. Эти величины называются инвариантами поля. Для их вывода можно воспользоваться тем обстоятельством, что свертка произведений тензоров, то есть суммирование по всем индексам произведений компонент тензоров, является очевидно инвариантной величиной, так как не зависит от тензорных индексов.

Простейшей сверткой является свертка самого тензора электромагнитного поля $\sum_{\alpha=0}^{3} F^{\alpha}_{\alpha}$. В силу явного вида компонент тензора ясно, что такая свертка является величиной тождественно равной нулю, так как диагональные компоненты тензора электромагнитного поля равны нулю.

Следующей возможной сверткой является свертка двух тензоров электромагнитного поля:

$$\sum_{\alpha\,\beta=0}^{3} F^{\alpha\,\beta} F_{\alpha\,\beta} = 2(B^2 - E^2) = \text{invar}.$$

Таким образом, для электромагнитного поля в любой системе координат остается инвариантной величина $B^2 - E^2 = J_1 = \text{invar}$, которая называется первым инвариантом электромагнитного поля. Доказательство инвариантности рассматриваемой свертки тензора электромагнитного поля можно продемонстрировать явными вычислениями:

$$\sum_{\alpha\,\beta=0}^{3} F^{\alpha\,\beta} F_{\alpha\,\beta} = \sum_{\alpha\beta=0}^{3} \left(\sum_{\lambda\,\mu=0}^{3} \gamma^{\alpha}{}_{\lambda}\, \gamma^{\beta}{}_{\mu} F'^{\,\lambda\,\mu} \right) \left(\sum_{\tau\sigma=0}^{3} a_{\alpha}{}^{\tau}\, a_{\beta}{}^{\sigma}\, F'_{\tau\,\sigma} \right) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\lambda,\mu,\tau,\sigma=0}^{3} \underbrace{\gamma^{\alpha}{}_{\lambda}\, a_{\alpha}{}^{\tau}}_{\delta_{\lambda\tau}} \cdot \underbrace{\gamma^{\beta}{}_{\mu} a_{\beta}^{;\,\tau}}_{\delta_{\mu\sigma}} \cdot F'^{\,\lambda\,\mu} F'_{\tau\,\sigma} = \sum_{\lambda,\mu=0}^{3} F'^{\,\lambda\,\mu} F'_{\lambda\,\mu} = \text{invar}.$$

Следующей возможной сверткой является свертка произведения трех тензоров электромагнитного поля. Однако из свойств тензора, а именно из-за антисимметрии тензора электромагнитного поля, следует, что свертка любого нечетного числа произведений компонент тензора является величиной тождественно равной нулю. Поэтому необходимо рассмотреть произведение четырех тензоров поля. Такая свертка тензоров не равна нулю и приводит к еще одному инварианту поля, который называется вторым инвариантом поля J_2.

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0}^{3} F^{\alpha\,\beta}\, F_{\beta\,\gamma}\, F^{\gamma\,\delta}\, F_{\delta\,\alpha} = \text{invar}$$

Непосредственные вычисления данного выражения приводят к явному виду второго инварианта $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}) = J_2$.

Вычисление последующих сверток от четного числа тензоров электромагнитного поля показывает, что все последующие ненулевые выражения определяются уже установленными первым и вторым инвариантом поля.

Следствия наличия инвариантов поля.

Наличие установленных инвариантов поля означает, что если в какой-то системе координат $\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$, то эта ортогональность имеет место во всех системах координат. Далее, если в какой-то системе координат первый инвариант поля положителен $J_1 > 0$, то можно найти такую инерциальную систему в которой электрическое поле полностью отсутствует $\mathbf{E} = 0$ и есть только магнитное поле. Наоборот если в какой-то системе координат электромагнитное поле таково, первый инвариант поля отрицателен $J_1 < 0$, это означает, что можно выбрать такую инерциальную систему в которой имеется только электрическое поле, а $\mathbf{B} = 0$.

§10 Тензор энергии-импульса электромагнитного поля.

С использованием тензора электромагнитного поля система уравнений Максвелла определяется уравнениями (29), (30). Выполним ряд тождественных преобразований с этими уравнениями. Умножим левую и правую стороны уравнения (29) на тензор электромагнитного поля: $F_{\beta\rho}$ и просуммируем по β

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3} F_{\beta\,\rho}\,\partial_\alpha\,F^{\alpha\,\beta} = \frac{4\pi}{c}\sum_{\beta=0}^{3} F_{\beta\rho}\,j^\beta \tag{31}$$

Перепишем тождественно левую часть равенства (31) следующим образом:

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\left[\partial_\alpha\left(F_{\beta\,\rho}\cdot F^{\alpha\,\beta}\right) - \underbrace{F^{\alpha\,\beta}\left(\partial_\alpha\cdot F_{\beta\,\rho}\right)}_{(*)}\right] = \frac{4\pi}{c}\sum_{\beta=0}^{3} F_{\beta\,\rho}\,j^\beta \tag{32}$$

Отмеченное звездочкой слагаемое в последнем равенстве можно переписать следующим образом:

$$-F^{\alpha\,\beta}\,\left(\partial_\alpha\cdot F_{\beta\,\rho}\right) = -\frac{1}{2}\left\{F^{\alpha\,\beta}\,\partial_\alpha\,F_{\beta\,\rho} + F^{\alpha,\beta}\,\partial_\alpha\,F_{\beta\,\rho}\right\}.$$

Во втором слагаемом правой части последнего тождества переобозначим индексы суммирования $\alpha \rightleftharpoons \beta$, что не меняет результата под знаком суммы. В результате можно написать, что:

$$-\frac{1}{2}\left\{F^{\alpha\,\beta}\,\partial_\alpha F_{\beta\,\rho} + F^{\alpha\,\beta}\,\partial_\alpha\,F_{\beta\,\rho}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{F^{\alpha\,\beta}\,\partial_\alpha\,F_{\beta\,\rho} + F^{\beta\,\alpha}\,\partial_\beta\,F_{\alpha\,\rho}\right\}.$$

Учитывая свойство антисимметрии тензора электромагнитного поля, можно продолжить преобразование и представить рассматриваемое слагаемое в виде:

$$-\frac{1}{2}\left\{F^{\alpha\,\beta}\,\partial_\alpha\,F_{\beta\,\rho} + F^{\alpha\,\beta}\,\partial_\beta\,F_{\rho\,\alpha}\right\} = -\frac{1}{2}\,F^{\alpha\,\beta}\left\{\partial_\alpha\,F_{\beta\,\rho} + \partial_\beta\,F_{\rho\,\alpha}\right\}$$

На основании уравнения (30) $\{\partial_\alpha\,F_{\beta\,\rho} + \partial_\beta\,F_{\rho\,\alpha}\} = -\partial_\rho\,F_{\alpha\,\beta}$. Таким образом, получим:

$$-\frac{1}{2}\,F^{\alpha\,\beta}\left\{\partial_\alpha\,F_{\beta\,\rho} + \partial_\beta\,F_{\rho\,\alpha}\right\} = \frac{1}{2}\,F^{\alpha\,\beta}\,\partial_\rho\,F_{\alpha\,\beta} = \frac{1}{4}\,\partial_\rho\left(F^{\alpha\,\beta}\,F_{\alpha\,\beta}\right).$$

Представленные тождественные преобразования приводят к следующему выражению для (32):

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^{3}\left[\partial_\alpha\left(F^{\alpha\,\beta}\,F_{\rho\,\beta}\right) - \frac{1}{4}\,\partial_\rho\left(F^{\alpha\,\beta}\,F_{\alpha\,\beta}\right)\right] = -\frac{4\pi}{c}\,\sum_{\beta=0}^{3} j^\beta\,F_{\beta\,\rho}$$

Окончательно перепишем данное выражение в виде:

$$\sum_{\alpha=0}^{3}\partial_\alpha\,T^{\alpha}_{\ \ \rho} = -\frac{1}{c}\sum_{\alpha=0}^{3} j^\alpha\,F_{\alpha\rho}, \qquad T^{\alpha}_{\ \ \rho} \equiv \frac{1}{4\pi}\left[\sum_{\beta=0}^{3} F^{\alpha\,\beta}\,F_{\rho\beta} - \frac{1}{4}\,J_1\delta^\alpha_\rho\right] \tag{33}$$

Здесь J_1 -первый инвариант электромагнитного поля. Шестнадцать компонент $T^{\alpha}_{\ \ \rho}$, $\alpha, \rho \in 0, \ldots, 3$ образуют 4-тензор второго ранга, который называется тензором энергии-импульса! (Можно обратить внимание, что символ Кронекера есть 4-тензор!).

Тензор натяжений Максвелла.

Выше представлено определение смешанного тензора энергии импульса. Для нахождения явного вида тензора энергии импульса необходимо воспользоваться определением тензора электромагнитного поля и провести необходимые суммирования его компонент. В результате получим:

$$T^{\alpha}_{\ \ \rho} = \begin{vmatrix} -\frac{E^2+B^2}{8\pi} & \frac{[\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}]_x}{4\pi} & \frac{[\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}]_y}{4\pi} & \frac{[\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}]_z}{4\pi} \\ -\frac{[\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}]_x}{4\pi} & T^1_{\ \ 1} & T^1_{\ \ 2} & T^1_{\ \ 3} \\ -\frac{[\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}]_y}{4\pi} & T^2_{\ \ 1} & T^2_{\ \ 2} & T^2_{\ \ 3} \\ -\frac{[\vec{\mathbf{E}}\times\vec{\mathbf{B}}]_z}{4\pi} & T^3_{\ \ 1} & T^3_{\ \ 2} & T^3_{\ \ 3} \end{vmatrix}$$

Пространственная часть тензора энергии - импульса ${T^i}_k$ $i, k \in 1, 2, 3$ связана с тензором натяжений Максвелла $M_{ik} = -{T^i}_k$ и равна:

$$M_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(E^2 + B^2\right)\right]; \qquad i, k \in 1, 2, 3 \equiv x, y, z.$$

Закон сохранения энергии - импульса.

Уравнение (33) в частных случаях выбора ρ соответствует законам сохранения энергии и импульса. Пусть, например, $\rho = 0$. В этом случае из (33) находим:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi}\right) + \mathrm{div}\left(\frac{[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]}{4\pi}\right) = -\frac{1}{c}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}),$$

что, как известно, соответствует дифференциальной форме закона сохранения энергии.

Положим в (33) $\rho = k$, где $k = 1, 2, 3$. В этом случае получим закон сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]_k}{4\pi c}\right) = -\sum_{\ell=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\ell}{T^\ell}_k - \left(\rho E_k + \frac{1}{c}[\mathbf{j}\times\mathbf{B}]_k\right).$$

§11 Эффект Доплера.

Эффект Доплера - это явление изменения частоты периодических процессов в различных системах координат. Рассмотрим это явление на примере переменного электромагнитного поля частоты ω.

Рассмотрим две системы координат S и $S^{'}$, движущиеся вдоль совпадающих осей $x, x^{'}$ с относительной скоростью v. Пусть в момент времени $t_1^{'} = t_1$ по часам системы $S^{'}$ в начале координат этой системы происходит вспышка света. Наблюдатель, находящийся в начале координат S зарегистрирует эту вспышку в момент времени

$$t_{\text{Н}} = t_1 + \frac{x}{c} = t_1 + \frac{vt_1}{c} = t_1\left(1 + \frac{v}{c}\right) = t_1^{'}\frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = t_1^{'}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}.$$

Соответственно, для интервала между двумя вспышками получим следующее выражение:

$$\Delta t = \Delta t^{'}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \qquad (34)$$

Пусть интервалы времени между вспышками постоянны и равны $T^{'}$ в системе координат $S^{'}$, или другими словами период процесса собственной системе координат равен $T^{'}$. В соответствии с представленным результатом в лабораторной системе координат период процесса меняется и зависит от скорости источника. Удобнее в этом случае ввести понятие частоты периодического процесса $\omega = 2\pi/T$ в лабораторной и собственной $\omega^{'} = 2\pi/T^{'}$ системах координат. Как следует из (34) в случае, если источник удаляется от наблюдателя, частота измеренная наблюдателем лабораторной системы координат меньше собственной частоты источника.

$$\omega = \omega^{'}\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Такой эффект Доплера называют красным смещением, так как для света уменьшение частоты, соответствует возрастанию длины волны и в области оптического диапазона это означает смещение длины волны в сторону красного света.

Если источник движется на наблюдателя, тогда:

$$\omega = \omega^{'}\sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}$$

Это означает, что частота, зарегистрированная наблюдателем, будет больше собственной частоты источника, и в этом случае говорят о фиолетовом смещении в том смысле, что если бы речь шла об электромагнитной волне оптического диапазона, то наблюдаемая покоящимся наблюдателем длина волны излучения была бы зарегистрирована в сравнении с длиной волны источника смещенной в сторону фиолетового света.

Для переменного электромагнитного поля, фиксированной частоты ω, распространяющегося в свободном пространстве зависимость от координат и времени определяется множителем $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$, где $\mathbf{k}$ -волновой вектор. Волновой вектор направлен по направлению распространения волны и численно равен $k = \omega/c$.

Множитель $\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ называется фазой электромагнитной волны. Так как в соответствии с эффектом Доплера частота зависит от выбора системы координат, а координаты и время удовлетворяют известным преобразованиям Лоренца, то видно, что фаза электромагнитной волны является инвариантной величиной $\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \mathrm{invar}$. Такое же заключение можно сделать и на основании второго инварианта электромагнитного поля.

Следовательно, если ввести понятие 4-волновой вектор по определению: $k^\mu \equiv (\omega/c, \mathbf{k})$, то фаза электромагнитной волны запишется как скалярное произведение 4-векторов: $\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \sum_{\mu=0}^{3} k^\mu\, x_\mu = \mathrm{invar}$. А так как x_μ - есть 4-вектор по определению, определенный выше 4-волновой вектор является 4-вектором и при переходе из одной системы координат в другую преобразуется по известному закону, а именно:

$$k^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \gamma^\mu{}_\lambda\, k'^\lambda,$$

где γ -матрица преобразований Лоренца.

При специальном выборе систем координат (движение вдоль совпадающих осей x) преобразования временных компонент 4-волнового вектора приводит к следующим выражениям для прямых и обратных преобразований:

$$\omega = \frac{\omega' + v\cdot k_x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \omega' \frac{\left(1 + v/c\cos\theta'\right)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$\omega' = \omega \frac{1 - v/c\cos\theta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v/c\cos\theta}. \tag{35}$$

Последнее выражение наиболее удобно для применения, так как определяет частоту наблюдаемую в лабораторной системе координат через собственную частоту источника и угол между волновым вектором и вектором скорости движущегося источника в лабораторной системе координат.

Продольный эффект Доплера.

Выражение (35) при значении угла $\theta = 0$ или $\theta = \pi$ определяет так называемый **продольный эффект Доплера**. В частном случае $\theta = 0$, волновой вектор совпадает с направлением скорости движения источника, источник движется на наблюдателя, возникает фиолетовое смещение. При значении угла $\theta = \pi$ – волновой вектор направлен против скорости движения источника, источник удаляется от наблюдателя и проявляется красное смещение.

Поперечный эффект Доплера.

Самым принципиальным результатом выражения (35) является то обстоятельство, что данная формула предсказывает существование так называемого *поперечного эффекта Доплера* $\theta = \pi/2$. В этом случае направления скорости источника и волнового вектора ортогональны. С точки зрения классической механики поперечного эффекта Доплера не может быть в принципе из-за абсолютности времени. Кроме того, в направлении ортогональном скорости не происходит изменения пространственных переменных. Тем не менее существование поперечного эффекта Доплера было подтверждено экспериментально в 1935 году и стало первым экспериментальным доказательством справедливости специальной теории относительности.

§ 12 Действие в электромагнитном поле.

Функция действия для системы "заряженные частицы - поле" может быть представлена в виде:

$$S = S_p + S_f + S_{pf} \tag{36}$$

где S_p - функция действия системы частиц, S_f - функция действия для электромагнитного поля, S_{pf} - функция действия взаимодействия частиц с полем.

Функция действия для системы частиц может быть представлена в виде:

$$S_p = -\sum_{i=1}^{N} m_i c \int ds \tag{37}$$

Функция действия, определяющая взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем может быть записана в виде:

$$S_{pf} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{c} \int \sum_{\mu=0}^{4} A^{\mu}\, dx_{\mu} \tag{38}$$

Функция действия для поля S_f - зависит только от переменных, определяющих свойства поля в отсутствии заряженных частиц. Поля удовлетворяют принципу суперпозиции. Это означает, что уравнения для описания поля должны быть линейными. Следовательно в S_f - могут содержаться только квадратичные по полю слагаемые. Так как S_f должна быть скалярной функцией, то существует единственный скаляр второго порядка по полю, который может быть построен из тензора электромагнитного поля $F_{\mu\,\nu}$

$$S_f = const \int \int \sum_{\lambda,\mu=0}^{3} F^{\lambda\,\mu} F_{\lambda\,\mu}\, dv\, dt \tag{39}$$

В системе единиц Гаусса $const = -\frac{1}{16\pi}$. Таким образом, действие для системы "заряженные частицы - электромагнитное поле" определяется суммой слагаемых (37)-(39).

§ 13 Принцип наименьшего действия в электродинамике.

Известно, что принцип наименьшего действия позволяет получить уравнения движения исходя из вида функции действия. Для заряженной частицы, находящейся в фиксированном электромагнитном поле функция действия имеет вид:

$$S_1 = S_p + S_{pf} = \int_a^b \left(-mc\, ds + \frac{q}{c} \sum_{\mu=0}^{3} A^{\mu}\, dx_{\mu} \right) = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt \tag{40}$$

где L - функция Лагранжа или Лагранжиан:

$$L \equiv -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{q}{c}\, \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\,\varphi. \tag{41}$$

Градиент функции L по переменной $\mathbf{v}$ в соответствии с методом Лагранжа в механике определяет обобщенный импульс частицы в поле $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = \mathrm{grad}_v\, L \equiv \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{q}{c}\, \mathbf{A} \tag{42}$$

Исходя из вида функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона для частицы находящейся в поле:

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\varphi. \tag{43}$$

Гамильтониан системы выражается через импульс, что с учетом соотношения (42) приводит к следующему соотношению:

$$\left(\frac{\mathcal{H}-q\varphi}{c}\right)^2 = m^2c^2 + \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\,\mathbf{A}\right) \tag{44}$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\,\mathbf{A}\right)^2} + q\varphi \tag{45}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби.

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби для частицы в электромагнитном поле, которое следует из (44) с использованием определений $\mathbf{p} \to \operatorname{grad} S$, $\mathcal{H} \to -\frac{\partial S}{\partial t}$.

$$\left(\operatorname{grad} S - \frac{q}{c}\,\mathbf{A}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} + q\varphi\right)^2 + m^2c^2 = 0 \tag{46}$$

Уравнения Лагранжа.

На основании (40), (41) нетрудно получить уравнение движения заряженной частицы в поле, так как принцип наименьшего действия $\delta S = 0$ приводит в общем случае, к уравнению Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \tag{47}$$

$\operatorname{grad}_{\mathbf{v}} L$ - определяется выражением (42). Найдем $\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} L$:

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{q}{c}\operatorname{grad}_{\mathbf{r}}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}) - q\operatorname{grad}_{\mathbf{r}}\varphi \tag{48}$$

Используя формулу векторного анализа

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b} \tag{49}$$

получим уравнение (48) в виде:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{q}{c}\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \frac{q}{c}\,\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} - q\operatorname{grad}\varphi. \tag{50}$$

Таким образом, уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} + \frac{q}{c}\,\mathbf{A}\right) = \frac{q}{c}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A} - q\operatorname{grad}\varphi \tag{51}$$

Так как

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}.$$

Окончательно находим:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{q}{c}\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - q\operatorname{grad}\varphi + \frac{q}{c}\,[\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}]. \tag{52}$$

Первая пара уравнений Максвелла.

Если ввести определения

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{53}$$

уравнение (52) примет вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\,\mathbf{E} + \frac{q}{c}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}], \tag{54}$$

что совпадает с уравнением движения заряда в поле под действием силы Лоренца. Таким образом, соотношения (53) позволяют определить первую пару системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0; \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{55}$$

Вторая пара уравнений Максвелла.

Для вывода второй пары системы уравнений Максвелла из принципа наименьшего действия воспользуемся действием вида:

$$S_2=S_{pf}+S_f \tag{56}$$

и проварьируем переменные поля.

$$\delta S=\int\left[\frac{1}{c^2}\sum_{\mu=0}^{3}j^{\mu}\,\delta A_{\mu}-\frac{1}{16\pi c}\delta\sum_{\lambda,\mu=0}^{3}F^{\lambda\,\mu}\,F_{\lambda\,\mu}\right]d\Omega=0 \tag{57}$$

Подставляя определение тензора электромагнитного поля $F_{\lambda\,\mu}=\partial_{\lambda}A_{\mu}-\partial_{\mu}A_{\lambda}$ находим:

$$\delta\,S=\int\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c}\sum_{\mu=0}^{3}j^{\mu}\,\delta A_{\mu}-\frac{1}{8\pi}\sum_{\lambda,\mu=0}^{3}F^{\lambda\,\mu}\delta(\partial_{\lambda}A_{\mu}-\partial_{\mu}A_{\lambda})\right\}d\Omega= \tag{58}$$

$$=\int\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c}\sum_{\mu=0}^{3}j^{\mu}\,\delta A_{\mu}-\frac{1}{8\pi}\sum_{\lambda,\mu=0}^{3}F^{\lambda\,\mu}\partial_{\lambda}\,\delta A_{\mu}+\frac{1}{8\pi}\sum_{\lambda,\mu=0}^{3}F^{\lambda\,\mu}\partial_{\mu}\,\delta A_{\lambda})\right\}d\Omega$$

Выполним замену индексов суммирования $\lambda\rightleftharpoons\mu$ в третьем слагаемом выражения (58), в результате получим:

$$\delta S=\int\frac{1}{c}\left\{\frac{1}{c}\sum_{\mu=0}^{3}j^{\mu}\,\delta A_{\mu}+\frac{1}{4\pi}\sum_{\lambda,\mu=0}^{3}F^{\lambda\,\mu}\partial_{\lambda}\,\delta A_{\mu}\right\}d\Omega \tag{59}$$

Проинтегрируем второе слагаемое в (59) по частям, в результате:

$$\int\sum_{\mu=0}^{3}\left[\left(\frac{1}{c}j^{\mu}-\frac{1}{4\pi}\sum_{\lambda=0}^{3}\partial_{\lambda}\,F^{\lambda\,\mu}\right)\delta A_{\mu}\right]d\Omega=0 \tag{60}$$

Окончательно из (60) находим:

$$\sum_{\lambda=0}^{3}\partial_{\lambda}F^{\lambda\,\mu}=\frac{4\pi}{c}\,j^{\mu}, \tag{61}$$

что и определяет вторую пару системы уравнений Максвелла.

Литература

[1] *С.Р.де Гроот, Л.Г.Сатторп.* Электродинамика. М., Наука, 1982.

[2] *А.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов.* Движение заряженных частиц в электрических и мангитных полях. М., Наука, 1978.

[3] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Гидродинамика. М., Наука, 1986.

[4] *В.Г.Левич.* Курс теоретической физики. Том 1 М., Наука, 1969.

[5] *В. Карцев.* Приключения великих уравнений. М., Знание, 1986, 288 с.

[6] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. т.6. М., Мир, 1966, 343с.

[7] *Джексон.* Классическая электродинамика.

[8] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.

[9] *Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский.* Квантовая теория волнового момента. Ленинград, Наука, 1975.

[10] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.

[11] *М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин.* Классическая электродинамика. М., Наука, 1988.

Оглавление