

Министерство общего и профессионального образования РФ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет  
Кафедра теоретической физики

---

ЗАПРЯГАЕВ С. А.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА (Электростатика)

Методические указания к практическим занятиям по курсу  
"ЭЛЕКТРОДИНАМИКА"  
для студентов 3-го курса дневного отделения

Рекомендовано Учебно - Методическим Объединением университетов РФ  
в качестве учебного пособия

Воронеж  
1998

# 1 ЭЛЕКТРОСТАТИКА

## 1.1 Общие формулы электростатики

Закон (определение)	Формулы
1. Система уравнений Максвелла (дифференциальная форма)	$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho; \operatorname{rot} \vec{E} = 0; \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (1)$ <p><math>\vec{D}</math> - вектор индукции; <math>\rho</math> - объемная плотность заряда; <math>\vec{E}</math> - напряженность поля; <math>\vec{P}</math> - дипольный момент единицы объема.</p> <p>В случае однородной, изотропной среды <math>\vec{D} = \varepsilon\vec{E}</math>, <math>\varepsilon</math> - диэлектрическая проницаемость среды</p>
2. Интегральная форма записи системы Максвелла	$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = 4\pi Q = 4\pi \int \rho dV \quad (2)$ $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (3)$
3. Скалярный потенциал $\varphi$	$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi; \quad \varphi(2) - \varphi(1) = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (4)$
4. Полный заряд системы $Q$	<p>В случае объемно - распределенного заряда в системе <math>Q = \int \rho dV</math>. Для поверхностно - распределенного заряда <math>Q = \int \sigma dS</math>. Для линейно - распределенного заряда <math>Q = \int \tau dl</math>.</p> <p><math>\rho, \sigma, \tau</math> - объемная, поверхностная и линейная плотность заряда.</p>
5. Дифференциальное уравнение для определения $\varphi$ и частное решение неоднородного уравнения Пуассона	<p>заряженный объем:</p> $\nabla^2 \varphi(\vec{r}) = -4\pi \frac{1}{\varepsilon} \rho(\vec{r}) \quad (5)$ $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV' \quad (6)$ <p>заряженная поверхность:</p> $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dS' \quad (7)$ <p>заряженная линия:</p> $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_L \frac{\tau(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dl' \quad (8)$

Закон (определение)	Формула
6. Вектор Герца электрического типа $\vec{\Pi}_e$	$\varphi = -\text{div } \vec{\Pi}_e; \quad (9)$ $\vec{E} = \text{grad div } \vec{\Pi}_e = -4\pi\vec{P} + \text{rot rot } \vec{\Pi}_e$
7. Дифференциальное уравнение для $\vec{\Pi}_e$	$\nabla^2 \vec{\Pi}_e = -4\pi\vec{P}; \quad \vec{\Pi}_e(\vec{r}) = \int \frac{\vec{P}(\vec{r}')}{ \vec{r} - \vec{r}' } dV' \quad (10)$
8. Поверхностные уравнения	$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma; \quad E_{2\tau} = E_{1\tau} \quad (11)$ $\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma; \quad D_{2\tau}/\varepsilon_2 = D_{1\tau}/\varepsilon_1$ $\varepsilon_2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 - \varepsilon_1 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = -4\pi\sigma; \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (12)$

## 1.2 Теорема Гаусса

Уравнение (2) называется теоремой Гаусса. Данное уравнение удобно использовать, когда условия симметрии системы позволяют вычислить поверхностный интеграл, определяющий поток вектора  $\vec{D}$ . Если имеется поверхность  $\tilde{S}$ , на которой выполняются соотношения  $d\vec{S} \parallel \vec{D}$  и  $|\vec{D}| = \text{const}$ , то поток вектора через  $\tilde{S}$  имеет вид:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D_n \tilde{S}. \quad (13)$$

Таким образом, уравнение (2) превращается в алгебраическое, из которого находится модуль вектора  $\vec{D}$ . Направление вектора  $\vec{D}$  совпадает с направлением нормали к  $\tilde{S}$ . Покажем на примерах, как в простейших случаях можно установить вид поверхности  $\tilde{S}$ .

**Пример 1.2.1** *Найти напряженность поля и скалярный потенциал точечного заряда  $q$ , расположенного в начале координат.*

Такая постановка задачи является искусственной, так как сама теорема (2) выведена, исходя из определения напряженности поля для точечного заряда. Однако, если считать (2) первичной, то можно рассуждать следующим образом. От выбора направления осей координат (см. рис. 1 с. 3) физические свойства системы не зависят. Следовательно, вектор  $\vec{E} \parallel \vec{r}$ ,

а величина этого вектора одинакова на сфере постоянного радиуса. В связи с этим если выбрать в качестве  $\tilde{S}$  в (13) сферу радиуса  $r$ , получим:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} \Rightarrow 4\pi r^2 E(r). \quad (14)$$

По условию теоремы Гаусса (2) поток вектора равен  $4\pi \times$ , т.е.

$$\vec{E} = \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \quad (15)$$

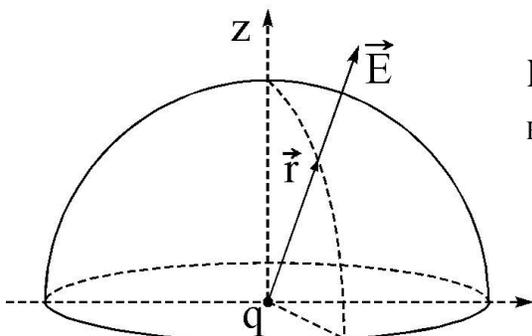


Рис. 1:

Для определения скалярного потенциала выполним интегрирование в (4) вдоль радиуса-вектора от точки  $r$  до  $\infty$ :

$$\varphi(\infty) - \varphi(r) = - \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_r^\infty \frac{q}{r'^2} dr' = \frac{q}{r'} \Big|_r^\infty = -\frac{q}{r}. \quad (16)$$

Исходя из определения потенциала, ясно, что  $\varphi$  определен с точностью до постоянной величины. Общепринято считать  $\varphi(\infty) = 0$ , т.е. потенциал точечного заряда, расположенного в начале координат, имеет вид:

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}. \quad (17)$$

**Пример 1.2.2** Найти напряженность поля  $\vec{E}$  и скалярный потенциал  $\varphi$  в каждой точке пространства, создаваемые шаром радиуса  $R$ , заряженным сферически симметрично с объемной плотностью  $\rho(r)$  в системе координат, связанной с центром шара.

Для решения задачи докажем, что напряженность в любой точке пространства направлена вдоль радиуса-вектора к данной точке и что на сфере постоянного радиуса величина напряженности постоянна, т.е.  $\vec{E} = E(r) \vec{r}/r$ . То, что  $\vec{E} \parallel \vec{r}$ , ясно из следующих рассуждений. Выделим в шаре бесконечно малый объем (т.  $A$ ). Поле, создаваемое  $A$  в  $P$ , обозначим  $\vec{E}_A$ . Поле, создаваемое т.  $A'$ , симметричной относительно  $OP$ , обозначим  $\vec{E}_{A'}$ . Очевидно, что  $|\vec{E}_A| = |\vec{E}_{A'}|$ . Следовательно, результирующий вектор по принципу суперпозиции направлен вдоль  $\vec{r}$ . Поле всего шара можно представить как суперпозицию полей симметрично расположенных пар точек. В результате ясно, что  $\vec{E} \parallel \vec{r}$ . Если вращать шар относительно точки  $O$ , физически в системе ничего не изменится. Следовательно,  $|\vec{E}| =$

const на сфере постоянного радиуса. Выбирая в качестве  $\tilde{S}$  в (13) сферу радиуса  $r$ , получим (14). Использование теоремы Гаусса должно быть выполнено с соблюдением важного условия, а именно: заряд в (2) - это тот заряд, который находится внутри поверхности интегрирования. Отсюда, если точка наблюдения лежит внутри шара  $r < R$ ,

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \int_0^r \rho(r') dv' = 4\pi Q(r), \quad E(r) = \frac{Q(r)}{r^2}, \quad (18)$$

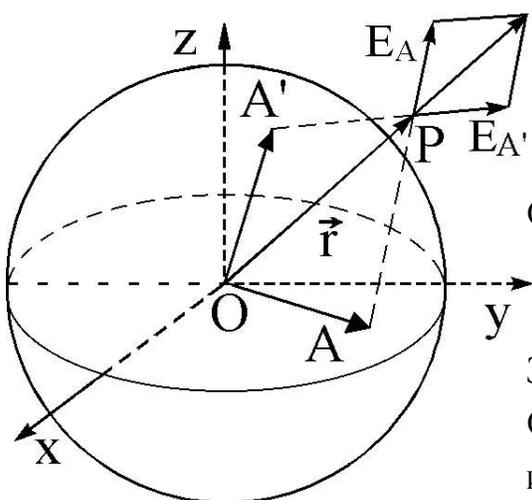


Рис. 2:

где  $Q(x)$  определяется выражением

$$Q(x) = \int_0^x \rho(r) r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi. \quad (19)$$

Соответственно, если  $r > R$ , находим:

$$E(r) = Q(R)/r^2. \quad (20)$$

Здесь  $Q(R)$  - полный заряд шара. Скалярный потенциал  $\varphi$  находим интегрированием вектора  $\vec{E}$  вдоль  $\vec{r}$  аналогично (16):

$$\varphi(\infty) - \varphi(r) = - \int_r^R \frac{Q(r')}{r'^2} dr' - \int_R^\infty \frac{Q(R)}{r'^2} dr',$$

т. е.

$$\varphi(r) = \begin{cases} Q(R)/R + \int_r^R Q(x)/x^2 dx, & r \leq R \\ Q(R)/r, & r \geq R \end{cases} \quad (21)$$

**Комментарий:** в частном случае  $\rho = \text{const}$  получим  $E(r) = Q/r^2$  для  $r > R$  и  $E = \frac{4}{3}\pi r \rho$  для  $r < R$ . Как видно, поле вне шара совпадает с полем точечного заряда  $Q(R)$ , расположенного в начале координат.

**Пример 1.2.3.** Найти напряженность поля и скалярный потенциал в произвольной точке пространства, создаваемые бесконечным цилиндром радиуса  $R$ , заряженным с объемной плотностью  $\rho(r) = ar^n$ . Здесь  $r$  - радиальная переменная цилиндрической системы координат,  $a = \text{const}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Из условий симметрии задачи следует, что  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$  и  $E(r)$  - постоянна на цилиндрической поверхности фиксированного радиуса (доказательство провести аналогично рассуждениям, приведенным в примере 1.2.2 стр.3). В

результате по теореме Гаусса находим (для цилиндра высоты  $H$ ):

$$E_1(r)2\pi rH = \frac{8\pi^2}{n+1}Har^{n+1}; \quad E_1 = \frac{4\pi}{n+1}ar^n; \quad r \leq R$$

$$E_2(r)2\pi rH = \frac{8\pi^2}{n+1}Har^{n+1}; \quad E_2 = \frac{4\pi}{n+1}a \frac{R^{n+1}}{r}; \quad r \geq R$$

Для скалярного потенциала получаем на основании (4) в случае  $r < R$ :

$$\varphi_1 = \int_r^R E_1(x)dx + \int_R^\infty E_2(x)dx = \frac{4\pi a}{n+1} \left[ \frac{R^{n+1} - r^{n+1}}{n+1} + R^{n+1} (\ln \infty - \ln R) \right];$$

Соответственно для случая  $r \geq R$

$$\varphi_2 = \int_r^\infty E_2(x)dx = \frac{4\pi}{n+1} a R^{n+1} [\ln \infty - \ln r].$$

Слагаемое  $\ln \infty$  может быть опущено, так как  $\varphi$  определен с точностью до постоянной, и данный член не изменяет величины  $\vec{E}$ .

#### Пример 1.2.4. Найти

напряженность поля  $\vec{E}$  в любой точке пространства, создаваемую бесконечной пластиной, заряженной поверхностной плотностью  $\sigma = \text{const}$ .

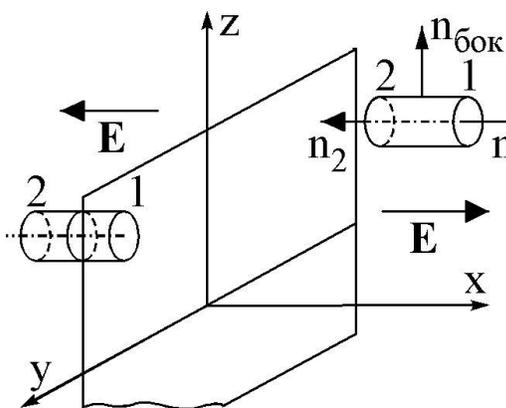


Рис. 3:

Из условия симметрии следует, что  $\vec{E} = \vec{i}E(x)$ . Если использовать теорему Гаусса для цилиндра произвольной высоты, ось которого параллельна оси  $x$ , то для цилиндра не пересекающего

заряженную плоскость, найдем:  $\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} \rightarrow (E_1 - E_2)S = 0$ .  $S$ -площадь основания цилиндра. Очевидно интеграл по боковой поверхности равен 0, так как  $\vec{E} \perp \vec{n}$ . Таким образом,  $\vec{E} = \text{const}$ . Если же расположить цилиндр так, чтобы он пересекал заряженную плоскость, получим:  $S(E_1 + E_2) = 4\pi\sigma S$ . А так как  $E_1 = E_2$ , находим окончательно:  $\vec{E} = 2\pi\sigma \text{sign}(x)\vec{i}$ .

**Комментарий:** данный метод имеет существенный недостаток, так как не может быть эффективно использован, если нет простой симметрии в системе зарядов, упрощающей интегральный член в (2).

**Задание на дом:** решить задачи 2.1-2.3 на стр. 32.

### 1.3 Решение задач электростатики методом интеграла Пуассона

Решение уравнения Пуассона (5) позволяет в общем случае определять поле независимо от симметрии в распределении зарядов. Вычисления по формулам (6) - (8) удобно проводить с использованием формулы, известной из курса математической физики:

$$\frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos(\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{n}}')) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'). \quad (22)$$

Здесь  $r_{<} = \min(r, r')$ ,  $r_{>} = \max(r, r')$ ,  $P_l(x)$  - полином Лежандра [2],  $\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{r}}/r$ ,  $Y_{lm}$  - сферическая функция,  $\theta, \varphi$  - углы сферической системы координат, задающие направление вектора  $\vec{\mathbf{r}}$ , а  $\theta', \varphi'$  - направление вектора  $\vec{\mathbf{r}}'$ . Полный список свойств сферических функций и их явный вид при конкретных значениях  $l$  и  $m$  приведен, например, в [2].

Сферические функции образуют полную, ортонормированную систему функций:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y'_{lm'}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (23)$$

$\delta_{ab}$  - символ Кронекера. Приведем для справки явный вид  $Y_{lm}$  в нескольких простейших случаях:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \quad Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}. \quad (24)$$

Используя (22), решение уравнения Пуассона можно представить в виде мультипольного разложения:

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(\vec{\mathbf{r}}), \quad (25)$$

здесь мультиполь  $\varphi_l$  определен соотношением:

$$\varphi_l(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \int \rho(r', \theta', \varphi') \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') \, dV', \quad (26)$$

$dV'$  - элемент объема интегрирования, который, например, в сферической системе координат равен  $dV' = r'^2 dr' \sin \theta' d\varphi'$ . Аналогичные формулы следуют из (7) и (8).

**Пример 1.3.1.** Кольцо радиуса  $R$  заряжено с линейной плотностью  $\tau$ . Найти поле в любой точке пространства (см. рис. 4 на стр. 7).

Исходя из цилиндрической симметрии в выражении (8), следует выбрать:  
 $dl = R d\alpha'$ ,  $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ ,  $\vec{r}' = \vec{i}R \cos \alpha' + \vec{j}R \sin \alpha'$ ,

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + R^2 - 2R(x \cos \alpha' + y \sin \alpha')}$$

В результате

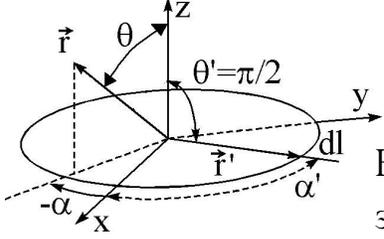


Рис. 4:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \frac{\tau R}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2R(x \cos \alpha' + y \sin \alpha')}} d\alpha' \quad (27)$$

В общем случае этот интеграл вычисляется через эллиптический интеграл первого рода (см. в [3], [4]).

Продемонстрируем вычисление этого выражения методом мультипольных разложений с учетом формулы (22). В данном случае находим:

$$\varphi(\vec{r}) = \tau \cdot \sum_{kq} \frac{4\pi}{2k+1} Y_{kq}^*(\theta, \alpha) \frac{r_{<}^k}{r_{>}^{k+1}} \int_0^{2\pi} Y_{kq}(\theta', \alpha') R d\alpha'$$

где  $r_{<} = \min(R, r)$ ,  $r_{>} = \max(R, r)$ . На основании определения сферических функций [2] интеграл по угловой переменной  $\alpha$  равен:

$$\int_0^{2\pi} Y_{kq} \left( \frac{\pi}{2}, \alpha' \right) d\alpha' = 2\pi \delta_{q0} Y_{kq} \left( \frac{\pi}{2}, 0 \right) = 2\pi \delta_{q0} \sqrt{\frac{2k+1}{4\pi}} P_k(0)$$

Известно, что полиномы Лежандра  $P_l$  удовлетворяют условию [3]:  $P_l(0) = 0$  для  $l$  нечетных, а для  $l$  четных  $P_l(0) = (-1)^{l/2} l! / 2^l (l/2!)^2$ . В результате находим (выполнив замену индекса суммирования  $k = 2n$ ):

$$\varphi(\vec{r}) = 2\pi\tau R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{<}^{2n}}{r_{>}^{2n+1}} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos \theta). \quad (28)$$

На оси кольца (при  $z > 0$ )  $\theta = 0$ . При этом  $\cos \theta = 1$  и  $P_{2n}(1) = 1$ , и ряд (28) суммируется в выражение, которое может быть легко получено по принципу суперпозиции  $\varphi(z) = 2\pi\tau R / \sqrt{z^2 + R^2}$ . Для доказательства выпишем несколько первых членов ряда (28)

$$\varphi(z > 0) = 2\pi\tau R \cdot \frac{1}{r_{>}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^4 - \frac{5}{16} \left( \frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^6 + \dots \right]$$

Сравнивая данное выражение с разложением в ряд Тейлора следующей функции  $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \dots$ , получаем искомый результат

$$\varphi(z) = \frac{1}{r_>} \frac{2\pi\tau R}{\sqrt{1 + (r_</r_>)^2}} = \frac{2\pi\tau R}{\sqrt{r_>^2 + r_<^2}} = \frac{2\pi\tau R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

**Пример 1.3.2** Диск в виде плоского кольца радиусов  $R_1$  и  $R_2$  заряжен с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти поле в любой точке пространства. (рис 5 с. 8)

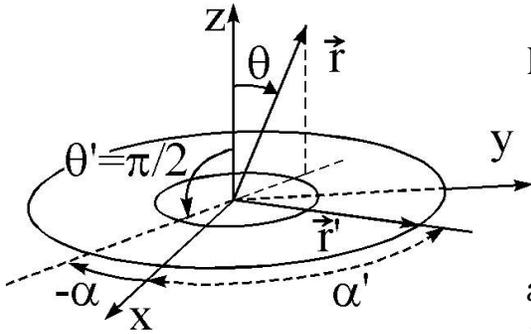


Рис. 5:

по угловым переменным:

$$\varphi(\vec{r}) = 2\pi\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos \theta) \int_{R_1}^{R_2} \frac{r_<^{2n}}{r_>^{2n+1}} r' dr',$$

где  $r_< = \min(r, r')$ ,  $r_> = \max(r, r')$ . Радиальный интеграл следует рассматривать в трех разных областях  $r < R_1$ ,  $R_1 \leq r \leq R_2$ ,  $r > R_2$ , чтобы определить, какая из переменных  $r, r'$  есть  $r_<$  или  $r_>$ , соответственно.

1.  $r < R_1$ . В этом случае  $r_< = r$ ,  $r_> = r'$ , следовательно,

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{r_<^{2n}}{r_>^{2n+1}} r' dr' = -\frac{r^{2n}}{2n-1} \left[ \frac{1}{R_2^{2n-1}} - \frac{1}{R_1^{2n-1}} \right]$$

2.  $R_1 \leq r \leq R_2$ . В этом случае область интегрирования необходимо разбить на две области  $R_1 \div r$  и  $r \div R_2$ . При этом в первой области  $r_< = r'$ ,  $r_> = r$ . Соответственно во второй области  $r_< = r$ ,  $r_> = r'$ . В результате:

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r_<^{2n}}{r_>^{2n+1}} r' dr' &= \int_{R_1}^r \frac{r_<^{2n}}{r_>^{2n+1}} r' dr' + \int_r^{R_2} \frac{r_<^{2n}}{r_>^{2n+1}} r' dr' = \\ &= \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{1}{r^{2n+1}} [r^{2n+2} - R_1^{2n+2}] - \frac{r^{2n}}{2n+1} \left[ \frac{1}{R_2^{2n-1}} - \frac{1}{r^{2n-1}} \right] \end{aligned}$$

В формуле (7) положим  $dS = r' dr' d\alpha'$ .  
В результате

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma(r', \alpha')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} r' dr' d\alpha'.$$

Используя (22) и повторяя вычисления аналогично вычислениям в примере 1.3.1, получим после интегрирования

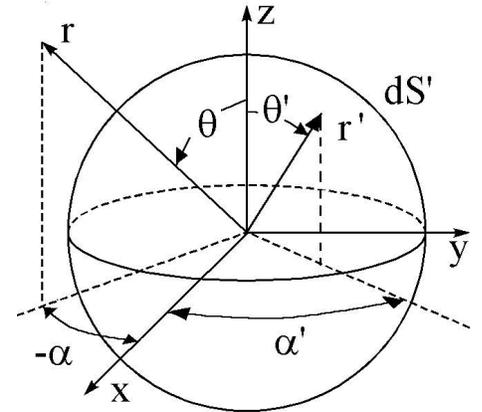


Рис. 6:

3.  $r > R_2$ . В этом случае  $r_< = r'$ ,  $r_> = r$ :

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{r_<^{2n}}{r_>^{2n+1}} r' dr' = \frac{1}{2n+2} \cdot \frac{1}{r^{2n+1}} [R_2^{2n+2} - R_1^{2n+2}]$$

**Пример 1.3.3.** Сфера радиуса  $R$  заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ . Найти поле в любой точке пространства. (рис 6 с. 8)

В (7), в сферической системе координат, имеем  $dS = R^2 \sin \theta' d\theta' d\alpha = R^2 d\Omega'$ . Используя мультипольное разложение (22) и явный вид функции  $Y_{10}$  (24), получим:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{kq} \frac{4\pi\sigma}{2k+1} \cdot \frac{r_<^k}{r_>^{k+1}} Y_{kq}(\theta, \alpha) \int Y_{10} Y_{kq} d\Omega' R^2 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} = \frac{4\pi\sigma}{3} \cdot \frac{r_<}{r_>^2} \cos \theta R^2$$

Отсюда находим:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 4\pi\sigma/3 \cdot r \cdot \cos \theta, & r < R \\ 4\pi\sigma/3 \cdot R^3/r^2 \cdot \cos \theta, & r > R \end{cases} \quad (29)$$

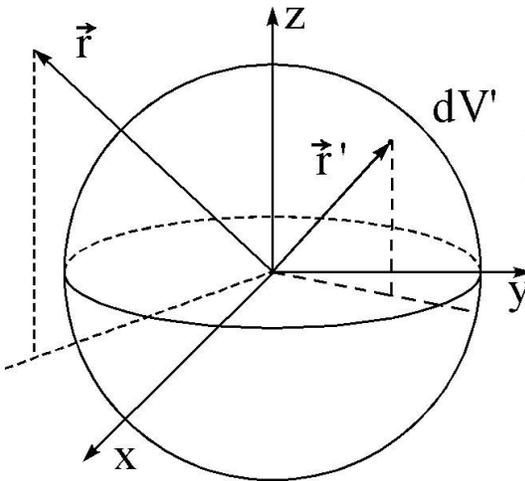


Рис. 7:

**Пример 1.3.4.** Шар радиуса  $R$  заряжен с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 \cos \theta$ . Найти поле в любой точке пространства.

В данном случае необходимо воспользоваться формулой (6). Повторяя вычисления интегралов по угловым переменным аналогично предыдущему примеру, находим:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{4\pi\rho}{3} \cos \theta \int_0^R \frac{r_<}{r_>^2} r'^2 dr'.$$

Рассмотрим два случая в соответствии с геометрией системы.

1.  $r > R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{4\pi\rho_0}{3} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \int_0^R r'^3 dr' = \frac{\pi\rho_0}{3} \cdot \frac{\cos \theta}{r^2} \cdot R^4 \quad (30)$$

2.  $r < R$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{4\pi_0\rho}{3} \cos \theta \cdot \left[ \int_0^r \frac{r_<}{r_>^2} r'^2 dr' + \int_r^R \frac{r_<}{r_>^2} r'^2 dr' \right] = \pi\rho_0 r \left( \frac{4}{3}R - r \right) \cos \theta$$

**Пример 1.3.5.** Шар радиуса  $R$  равномерно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Его внешняя неограниченная экваториальная плоскость заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Найти скалярный потенциал в любой точке пространства. Из общей формулы получить частный случай поля на оси симметрии системы (см. задачу 26 в [1]).

По принципу суперпозиции  $\varphi$  можно представить в виде суммы двух членов:  $\varphi = \varphi + \varphi$ .  $\varphi$  найден в примере 1.2.2, (формула (21)), в которой нужно рассмотреть частный случай  $\rho = \text{const}$ ). Для сравнения приведем другое решение этой же задачи, основанное на мультипольных разложениях. В соответствии с (6) находим:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \int \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') dV' = \\ &= \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \sqrt{4\pi} \int \frac{r'^l}{r^{l+1}} \rho r'^2 dr' \int Y_{00} Y_{lm}^* d\Omega = 4\pi \int \frac{\rho(r')}{r_{>}} r'^2 dr'. \end{aligned} \quad (31)$$

В последнем выражении надо рассмотреть два случая:  $r > R$  и  $r < R$ . Пусть  $r < R$ , из (31) получим:

$$\varphi^{(1)} = 4\pi\rho \left[ \int_0^r \frac{r'^2 dr'}{r} + \int_r^R r' dr' \right] = 2\pi\rho \left[ R^2 - \frac{r^2}{3} \right], \quad r < R$$

Если  $r > R$ , из (31) получим:

$$\varphi^{(2)} = 4\pi\rho \frac{1}{r} \int_0^R r'^2 dr' = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \frac{1}{r} = \frac{Q}{r}, \quad r > R$$

В результате

$$\varphi = \begin{cases} 2\pi\rho (R^2 - r^2/3), & r < R \\ Q/r, & r > R \end{cases} \quad (32)$$

Для определения потенциала плоскости воспользуемся решением задачи, разобранный в примере 1.3.2. В данном случае необходимо положить  $R_2 = \infty$ . В результате

$$\begin{aligned} \varphi &= 2\pi\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n!)}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos\theta) \frac{1}{2n+1} \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+1}}; \quad r < R \\ \varphi &= 2\pi\sigma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n!)}{2^{2n} (n!)^2} P_{2n}(\cos\theta) \left[ \frac{r^{2n+2} - R^{2n+1}}{(2n+2)R^{2n+1}} + \frac{1}{r(2n+1)} \right]; \quad r > R \end{aligned} \quad (33)$$

Сумма двух выражений (32) и (33) дает искомый результат. В частном случае на оси  $z$  найдем из (33):

$$\varphi(z) = \varphi + \varphi = 2\pi\sigma \left( -\sqrt{R^2 + z^2} \right) + \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho R^3/|z|, & |z| \geq R \\ \frac{2}{3}\pi\rho R^2(3 - z^2/r^2), & |z| < R \end{cases}$$

**Задание на дом:** решить задачи 2.4 - 2.6 на стр 32.

#### 1.4 Решение неоднородного уравнения Пуассона

**Пример 1.4.1.** На расстоянии  $a$  от бесконечной плоскости находится точечный заряд  $q$ . Потенциал плоскости поддерживается равным нулю. Определить поле над плоскостью.

Для всех точек  $z > 0$

$$\nabla^2\varphi = -4\pi q\delta(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}). \quad (34)$$

Общее решение уравнения (34) есть:

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|} + \varphi_0. \quad (35)$$

Здесь первое слагаемое - частное решение неоднородного уравнения (34), а  $\varphi_0$  - общее решение однородного уравнения  $\nabla^2\varphi_0 = 0$ , которое может быть представлено в виде

$$\varphi_0(\vec{\mathbf{r}}) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l R^l + B_l r^{-(l-1)}) Y_{l0}(\theta, \varphi) \quad (36)$$

Суммирование по индексу  $m$  в (36) отсутствует в связи с осевой симметрией по  $z$ . Для удовлетворения физических условий надо положить  $A_l = 0$  для  $r > a$  и  $B_l=0$  для  $r < a$ . По условию задачи  $\varphi$  на плоскости  $x, y$  обращается в ноль. Запишем разложение потенциала по мультиполям для точек на плоскости  $xy$ :

$$\frac{q}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|} = \sum_l \frac{4\pi q}{2l+1} \cdot \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{l0}^*(\theta_a, \varphi_a) Y_{l0} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi \right) \quad (37)$$

Здесь  $r_{<} = \min(r, a)$ ,  $r_{>} = \max(r, a)$ . В результате находим:

$$\sum_l \left[ A_l r^l Y_{l0} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi \right) + \frac{4\pi q}{2l+1} \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{l0}^*(0, 0) Y_{l0} \left( \frac{\pi}{2}, \varphi \right) \right] = 0.$$

Решениями этого уравнения являются два соотношения:

$$A_l^{(1)} = -\frac{4\pi q}{2l+1} \frac{1}{a^{l+1}} Y_{l0}^*(0, 0); \quad A_l^{(2)} = -\frac{4\pi q}{2l+1} \frac{1}{a^{l+1}} (-1)^l Y_{l0}^*(\pi, 0).$$

Первое решение соответствует полю точечного заряда  $-q$  в точке  $\vec{\mathbf{a}}$  и, следовательно, не удовлетворяет физической постановке задачи. Второе решение соответствует полю заряда  $-q$  в точке  $-\vec{\mathbf{a}}$ . Для того, чтобы показать это, воспользуемся свойством сферических функций:  $Y_{l0}\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = 0$  для  $l$  нечетных. Таким образом, для точек плоскости  $xy$  с  $r < a$ :

$$\varphi_0 = \sum_l \frac{(-4\pi q)}{2l+1} \cdot \frac{r^l}{a^{l+1}} Y_{l0}^*(\pi, 0); \quad Y_{l0}\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) = -\frac{q}{|\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}}|}.$$

Аналогичное выражение вытекает для  $R > a$ . Окончательно

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{a}}|} - \frac{1}{|\vec{\mathbf{r}} + \vec{\mathbf{a}}|} \quad (38)$$

**Пример 1.4.2.** Шар радиуса  $R$  заряжен с объемной плотностью  $\rho(\vec{\mathbf{r}})$  в сферической системе координат, связанной с центром шара. Найти потенциал в любой точке пространства.

Потенциалы внутри  $\varphi_1$  и снаружи  $\varphi_2$  шара удовлетворяют уравнениям:

$$\nabla^2 \varphi_1 = -4\pi \rho(r, \theta, \varphi), \quad (39)$$

$$\nabla^2 \varphi_2 = 0. \quad (40)$$

Представим  $\rho(r, \theta, \varphi)$  в виде:

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \rho_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (41)$$

где

$$\rho_{lm}(r) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho(r, \theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Аналогично представим потенциалы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ :

$$\varphi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \varphi_{lm}^{(1)}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad \varphi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \varphi_{lm}^{(2)}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad (42)$$

Подставив (42) и (41) в уравнения (39) и (40), получим:

$$\frac{d^2}{dr^2} \left( r \varphi_{lm}^{(1)} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \left( r \varphi_{lm}^{(1)} \right) = -4\pi r \rho_{lm}(r); \quad (43)$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \left( r \varphi_{lm}^{(2)} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \left( r \varphi_{lm}^{(2)} \right) = 0 \quad (44)$$

Решение уравнения (43) следует искать в виде суммы двух решений:  $f$  - частного решения неоднородного уравнения, которое может быть выписано

при известной функции  $\rho_{lm}$  или  $\rho(r, \theta, \rho)$ , и общего решения однородного уравнения. Общее решение однородного уравнения есть:

$$(r\varphi_{lm}^{(i)}) = A_l^{(i)} r^{l+1} + B_l^{(i)} r^{-l}; \quad i = 1, 2$$

Учитывая требование ограниченности потенциала в нуле и на бесконечности:

$$\varphi_{lm}^{(1)} = A_l r^l + \frac{1}{r} f_l(r), \quad r < R; \quad \varphi_{lm}^{(2)} = B_l \frac{1}{r^{l+1}}, \quad r > R,$$

где  $f_l$  удовлетворяет уравнению:

$$f''_{lm} - \frac{l(l+1)}{r^2} f_{lm} = -4\pi r \rho_{lm}(r)$$

Коэффициенты  $A_l$  и  $B_l$  находятся из условий

$$\varphi_{lm}^{(1)}(R) = \varphi_{lm}^{(2)}(R); \quad \left. \frac{\partial \varphi_{lm}^{(1)}}{\partial r} \right|_{r=R} = \left. \frac{\partial \varphi_{lm}^{(2)}}{\partial r} \right|_{r=R},$$

то есть:

$$A_l R^l + \frac{1}{R} f_l(R) = B_l \frac{1}{R^{l+2}};$$

$$l A_l R^{l-1} - \frac{1}{R^2} f_l(R) + \frac{1}{R} f'_l(R) = -B_l \frac{l+1}{R^{l+2}}$$

Решение данных алгебраических уравнений имеет вид:

$$B_l = \frac{R^{l+1}}{2l+1} \left[ \frac{l+1}{R} f(R) - f'(R) \right]; \quad A_l = -\frac{1}{R^l(2l+1)} \left[ \frac{1}{R} f(R) + f'(R) \right].$$

Таким образом, окончательно

$$\varphi_{lm}^{(1)} = -\frac{1}{2l+1} \cdot \frac{1}{R^l} \left[ \frac{l}{R} f(R) + f'(R) \right] r^l + \frac{1}{r} f(r), \quad (45)$$

$$\varphi_{lm}^{(2)} = -\frac{1}{2l+1} R^{l+1} \left[ \frac{l+1}{R} f(R) - f'(R) \right] \frac{1}{r^{l+1}} \quad (46)$$

Подставляя эти выражения в (42), получаем требуемый результат.

**Пример 1.4.3.** *Используя результаты предыдущей задачи, найти скалярный потенциал и напряженность поля в любой точке пространства, если шар заряжен с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 \cos \theta$ . Сравнить полученный результат с решением примера 1.3.4 (см. задачу N 55 в [1]).*

На основании (41) получим:

$$\rho_{lm}(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 \cos \theta Y_{lm}(\theta, \varphi) d\Omega = \rho_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \delta_{l1} \delta_{m0}.$$

Следовательно, поле вне  $\varphi_2$  и внутри  $\varphi_1$  следует искать в виде

$$\varphi_1(r, \theta, \varphi) = \varphi_{10}^{(1)}(r) Y_{10}(\theta, \varphi); \quad \varphi_2(r, \theta, \varphi) = \varphi_{10}^{(2)}(r) Y_{10}(\theta, \varphi) \quad (47)$$

Частное решение уравнения (43) есть:  $f_{l0} = -\pi\rho_0\sqrt{\frac{4\pi}{3}}r^3$ . На основании (45) получим:

$$\begin{aligned} \varphi_{10}^{(1)} &= -\frac{1}{3R^2} \left[ \frac{1}{R} f(R) + f'(R) \right] r + \frac{1}{r} f(r) = \pi\rho_0 r \left( \frac{4}{3}R - r \right) \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \\ \varphi_{10}^{(2)} &= \frac{1}{3} R^2 \left[ \frac{2}{R} f(R) - f'(R) \right] \frac{1}{r^2} = \pi\rho_0 R^4 \frac{1}{3r^2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}}; \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в (47), находим для скалярного потенциала:

$$\varphi_1 = \pi\rho_0 r \left( \frac{4}{3}R - r \right) \cos \theta; \quad \varphi_2 = \pi\rho_0 R^4 \frac{1}{3r^2} \cos \theta. \quad (48)$$

Для определения напряженности поля имеем выражения:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}}_1 &= -\text{grad } \varphi_1 = - \left[ \vec{\mathbf{a}}_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \vec{\mathbf{a}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \vec{\mathbf{a}}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} \right] = \\ &= \vec{\mathbf{a}}_2 2\pi\rho_0 \left( r - \frac{2}{3}R \right) \cos \theta + \vec{\mathbf{a}}_\theta \pi\rho_0 \left( \frac{4}{3}R - r \right) \sin \theta. \\ \vec{\mathbf{E}}_2 &= -\text{grad } \varphi_2 = \vec{\mathbf{a}}_r \frac{2\pi\rho_0 R^4}{3r^3} \cos \theta + \vec{\mathbf{a}}_\theta \frac{\pi\rho_0 R^4}{3r^3} \sin \theta. \end{aligned} \quad (49)$$

**Пример 1.4.4** Потенциал на поверхности шара радиуса  $R$  поддерживается равным  $V(\theta, \varphi)$  в сферических координатах. Определить поле в произвольной точке пространства.

Исходя из общего решения уравнения Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$ , для точки вне и внутри шара имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_1(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l,m} A_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad r < R; \\ \varphi_2(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l,m} B_{lm} r^{-(l-1)} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad r > R. \end{aligned} \quad (50)$$

По условию задачи на поверхности шара  $\varphi_1(R, \theta, \varphi) = V(\theta, \varphi) = \varphi_2(r, \theta, \varphi)$ . Представим  $V(\theta, \varphi)$  в виде:

$$V(\theta, \varphi) = \sum_{lm} V_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad V_{lm} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} V(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (51)$$

В результате находим:

$$A_{lm} = V_{lm}/R^l; \quad B_{lm} = V_{lm}R^{l+1}; \quad (52)$$

Подставляя (52) в (50), получаем требуемый результат. Рассмотрим частный случай  $V = V_0 \cos \theta$ . На основе найденного общего решения для потенциалов (50) получим:

$$\varphi_1 = V_0 \frac{r}{R} \cos \theta, \quad r \leq R; \quad \varphi_2 = V_0 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cos \theta, \quad r \geq R.$$

В соответствии с (12), зная скачок напряженности поля на границе, можно определить поверхностную плотность заряда на сфере:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} \right] = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{V_0}{R} \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta.$$

Самостоятельно рассмотреть случай  $V = const$ .

**Пример 1.4.5.** Две полусферы имеют потенциал  $V$  и  $-V$ . Найти поле в произвольной точке пространства.

Используя результаты предыдущей задачи, вычислим коэффициенты  $V_{lm}$ . В данном случае получаем:

$$V_{lm} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} V Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d\Omega + \int_{\pi/2}^\pi \int_0^{2\pi} (-V) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d\Omega. \quad (53)$$

Выполняя интегрирование по  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , находим:

$$V_{lm} = V \int_0^{\pi/2} Y_{l0}^*(\theta, 0) 2\pi \delta_{m0} - V \int_{\pi/2}^\pi Y_{l0}^*(\theta, 0) 2\pi \delta_{l0}.$$

Выражая сферическую функцию через полином Лежандра  $Y_{l0}(\theta, 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta)$ , сделаем замену переменной интегрирования  $x = \cos \theta$ , в результате

$$V_{lm} = V 2\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} \left[ \int_0^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^0 P_l(x) dx \right]$$

Поскольку при нечетных  $l$  полином  $P_l$  нечетен относительно  $x$ , а при четных  $l$  четен, отличной от нуля является сумма интегралов только для нечетных значений  $l = 1, 3, 5, \dots$

$$V_{lm} = 4\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0} \int_0^1 P_l(x) dx = V \cdot 4\pi \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \cdot \frac{(-1)^{\frac{l-1}{2}} \Gamma(\frac{1}{2}) \delta_{m0}}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{l+3}{2})}. \quad (54)$$

Здесь  $\Gamma(x)$  - гамма-функция [4]. Окончательно

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{l=1,3,5,\dots} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} V_{l0} \left(\frac{r}{R}\right)^l P_l(\cos \theta) = \\ &= \left[ \frac{3}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{r}{R}\right)^3 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{r}{R}\right)^5 P_5(\cos \theta) + \dots \right] \cdot V. \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \sum_{l=1,3,5,\dots} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} V_{l0} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} P_l(\cos \theta) = \\ &= \left[ \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{R}{r} P_1(\cos \theta) - \frac{7}{8} \left(\frac{R}{r}\right)^4 P_3(\cos \theta) + \frac{11}{16} \left(\frac{R}{r}\right)^6 P_5(\cos \theta) + \dots \right] \cdot V \end{aligned} \quad (56)$$

В частном случае  $\cos \theta = 0$  (на оси  $x$ ) найдем из (55):

$$\varphi(z) = V \left[ 1 - \frac{z^2 - R^2}{z\sqrt{z^2 + r^2}} \right]$$

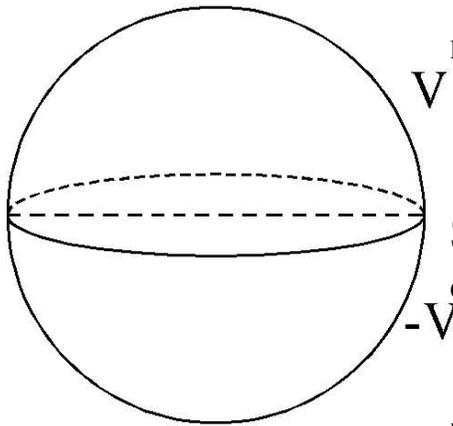


Рис. 8:

**Задание на дом:** решить задачи 2.7-2.9 на стр. 32, 2.10- 2.12 на стр. 33

### 1.5 Уравнение Лапласа в декартовых и цилиндрических координатах

**Пример 1.5.1.** Все грани прямоугольного параллелепипеда с размерами  $a, b, c$  по осям  $x, y, z$  поддерживаются при потенциале, равном 0, за исключением грани  $z = c$ , на которой задано значение потенциала  $V(x, y)$ . Найти потенциал внутри параллелепипеда.

Уравнение Лапласа в декартовых координатах:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (57)$$

Представив потенциал в виде  $\varphi = X(x)Y(y)Z(z)$  и разделив (57) на  $\varphi$  стандартным методом разделения переменных, получим:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2; \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2; \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2,$$

где  $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ . Считая  $\alpha$  и  $\beta$  положительными, получим в качестве решения трех дифференциальных уравнений функции  $\exp(\pm i\alpha x)$ ,  $\exp(\pm i\beta y)$ ,  $\exp(\pm \gamma z)$ . Их линейные суперпозиции позволяют получить решение конкретной краевой задачи.

В данном примере из требования  $\varphi = 0$  при  $x = 0, y = 0, z = 0$  вытекает, что  $X, Y, Z$  имеют вид:

$$X(x) = \sin \alpha x; \quad Y(y) = \sin \beta y; \quad Z = \text{sh} \left( \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z \right). \quad (58)$$

Из условия  $\varphi = 0$  при  $x = a$  и  $y = b$  следует, что  $\alpha a = n\pi$  и  $\beta b = m\pi$ , где  $n, m$  — любые целые числа  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Вводя обозначения  $\alpha_n = n\pi/a, \beta_m = m\pi/b, \gamma_{nm} = \pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$ , запишем частное решение в виде:  $\varphi_{nm}(x, y, z) = \sin \alpha_n x \cdot \sin \beta_m y \cdot \text{sh} \gamma_{nm} z$ .

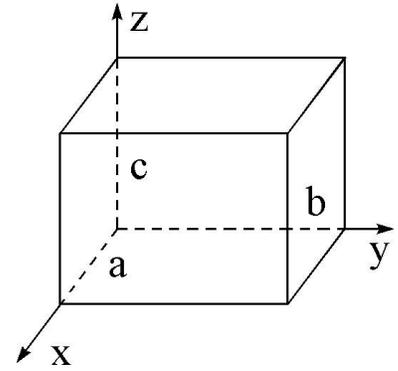


Рис. 9:

Данное решение удовлетворяет граничным условиям на всех гранях, кроме  $z = c$ . Разложим искомый потенциал в ряд по функциям  $\varphi_{nm}$ :

$$\varphi(x, y, c) = V(x, y) = \sum_{n,m} A_{nm} \varphi_{nm}(x, y, c). \quad (59)$$

Коэффициенты разложения определяются из граничного условия

$$\varphi(x, y, c) = V(x, y) = \sum_{nm} A_{nm} \varphi_{nm}(x, y, c).$$

Полученное соотношение представляет собой разложение Фурье в двойной ряд Фурье. Напомним определение для ряда Фурье:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ A_m \cos \left( \frac{2\pi m x}{a} \right) + B_m \sin \left( \frac{2\pi m x}{a} \right) \right], \quad (60)$$

где

$$A_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \cos \left( \frac{2\pi m x}{a} \right) dx; \quad B_m = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) \sin \left( \frac{2\pi m x}{a} \right) dx.$$

Следовательно, коэффициенты  $A_{nm}$  равны:

$$A_{nm} = \frac{4}{a^2 \text{sh} \gamma_{nm} c} \int_0^a dx \int_0^b dy V(x, y) \sin \alpha_n x \sin \beta_m y.$$

Таким образом, решение задачи определяется выражением (59).

**Пример 1.5.2.** Потенциал на боковой и нижней поверхностях цилиндра равен нулю, а на верхней поверхности потенциал равен  $V(\rho, \alpha)$ . Найти потенциал в произвольной точке внутри цилиндра. Радиус цилиндра  $R$ , высота  $H$ ,  $\rho$  и  $\alpha$  — переменные цилиндрической системы координат.

Запишем уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (61)$$

Решение уравнения (61) следует искать в виде  $\varphi = R(\rho)Q(\alpha)Z(z)$ . В результате разделения переменных получим три уравнения:

Уравнение	Решение
$z'' - k^2 z = 0$	$z = Ce_{kz} + De^{-kz}$
$Q'' = \nu^2 Q = 0$	$Q = Ae^{i\nu\alpha} + B^{-i\nu\alpha}$
$R'' + \frac{1}{\rho} R' + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) R = 0$	$R = EJ_\nu(k\rho) + FJ_{-\nu}(k\rho)$

При решении данной задачи из условия однозначности потенциала и его обращения в ноль при  $z = 0$  следует выбрать такие комбинации:  $Q(\alpha) = A \sin m\alpha + B \cos m\alpha$ ,  $Z(z) = \text{sh } kz$ , где  $m$  — произвольно целое положительное число,  $k$  — постоянная, подлежащая определению. Чтобы потенциал был конечным при  $\rho = 0$ , необходимо положить  $F = 0$ , а из условия обращения потенциала в ноль при  $\rho = R$  следует, что  $k$  принимает лишь значения:  $k_{nm} = x_{nm}/R$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $x_{nm}$  — корни уравнения  $J_m(x) = 0$ . Следовательно, общее решение имеет вид

$$\varphi(\rho, \alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m(k_{nm}\rho) \text{sh}(k_{nm}z) [A_{nm} \sin m\alpha + B_{nm} \cos m\alpha]. \quad (62)$$

При  $z = H$  данное решение должно принимать значение  $V(\rho, \alpha)$ , т.е.:

$$V(\rho, \alpha) = \sum_{nm} \text{sh}(k_{mn}H) J_m(k_{mn}\rho) [A_{nm} \sin m\alpha + B_{nm} \cos m\alpha]. \quad (63)$$

Как видно, (63) есть ряд Фурье по переменной  $\alpha$  и ряд Фурье-Бесселя [3] по переменной  $\rho$ . Определения, связанные с рядом Фурье, представлены формулами (60). Соответственно, для ряда Фурье-Бесселя:

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu(x_{\nu n}\rho/a); \quad A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a \rho f(\rho) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right) d\rho. \quad (64)$$

Таким образом, коэффициенты  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  в (64) определяются выражениями:

$$A_{nm} = c \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R d\rho \cdot \rho V(\rho, \alpha) J_m(k_{mn}\rho) \sin m\alpha; \quad (65)$$

$$B_{nm} = c \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^R d\rho \cdot \rho V(\rho, \alpha) J_m(k_{mn}\rho) \cos m\alpha,$$

где  $C = 2c \operatorname{csch}(k_{mn}H) / \pi R^2 J_{m+1}^2(k_{mn}R)$ . Формула (62) с учетом (65) является решением поставленной задачи.

**Комментарий:** *следует иметь в виду, что (62) определяется при условии, что потенциал  $\varphi = 0$  при  $z = 0$  для всех  $\rho$  и при  $r = R$  для всех  $z$ . Форма ряда (62) будет иной для других граничных условий.*

Ряд Фурье-Бесселя (62) может быть использован при рассмотрении конечных интервалов изменения радиальной переменной цилиндрической системы координат, например, для области внутри цилиндра данного радиуса. Если же рассматривается неограниченное пространство и  $\rho$  может быть  $\infty$ , то ряд переходит в интеграл аналогично переходу ряда Фурье в интеграл Фурье. Например, если интеграл в области, свободной от зарядов, конечен и стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ , то общее решение имеет вид:

$$\varphi(\rho, \alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dk e^{-k|z|} J_m(k\rho) [A_m(k) \sin m\alpha + B_m(k) \cos m\alpha]. \quad (66)$$

**Пример 1.5.3.** *Диск радиуса  $R$  заряжен до величины  $q$  с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Заряд распределен по диску так, что его поверхность имеет постоянный потенциал. Найти потенциал в любой точке пространства и распределение заряда на диске [5].*

Из условий задачи следует, что потенциал симметричен относительно оси диска и плоскости, в которой расположен диск. Выберем цилиндрическую систему координат с осью  $z$  и с началом координат в центре диска. В соответствии с формулой (66) потенциал можно представить следующим образом:

$$\varphi(\rho, z) = \int_0^{\infty} f(k) e^{-k|z|} J_0(k\rho) dk, \quad (67)$$

где  $J_0$  — функция Бесселя, а  $f(k)$  должна быть определена из граничных условий при  $z = 0$ . По условию задачи  $\varphi(\rho, 0) = V$  для  $\rho \leq R$ . Значение потенциала  $\varphi(\rho, 0)$  для  $\rho > R$  неизвестно. Однако из симметрии задачи ясно, что нормальная производная потенциала равна нулю (напряженность поля

лежит в плоскости  $x, y$ ). В результате граничные условия имеют вид:

$$\varphi(\rho, 0) = V \quad \rho \leq R; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\rho, 0) = 0 \quad R \leq \rho < \infty \quad (68)$$

Так как потенциал диска на больших расстояниях должен совпадать с потенциалом точечного заряда  $q$ , находим:

$$\varphi(\rho, z) \rightarrow \frac{q}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = q \int_0^\infty e^{-k|z|} J_0(k\rho) dk. \quad (69)$$

В данной формуле использовано известное интегральное равенство [4]. Из сравнения (69) и (67) имеем  $f(0) = q$ .

Используя граничные условия (68) на основании (67), получим систему интегральных уравнений

$$\int_0^\infty dk f(k) J_0(k\rho) = V, \quad 0 \leq \rho \leq R; \quad \int_0^\infty dk k f(k) J_0(k\rho) = 0, \quad \rho > R \quad (70)$$

Система интегральных уравнений, определенных в разных областях переменной, называется системой парных интегральных уравнений. Известно аналитическое решение следующей системы парных уравнений [5]:

$$\int_0^\infty g(y) J_n(yx) dy = x^n, \quad 0 \leq x < 1; \quad \int_0^\infty yg(y) J_n(yx) dy = 0, \quad 1 < x < \infty \quad (71)$$

Решение системы (71) имеет вид [5]:

$$g(y) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1/2)} \sqrt{\frac{2}{y}} J_{n+1/2}(y). \quad (72)$$

Система уравнений (70) сводится к системе (71) заменой переменных  $x = \rho/R, y = kR, n = 0$ . Таким образом,

$$g(y) = \frac{f}{RV} = \frac{2 \sin(kR)}{\pi kR}. \quad (73)$$

Учитывая, что  $f(0) = q$ , из (73) получим  $q = 2RV/\pi$ . В результате потенциал в произвольной точке пространства определяется выражением:

$$\varphi(\rho, z) = \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{kR} e^{-|z|k} J_0(k\rho) dk. \quad (74)$$

Частные случаи данного выражения следующие:

а) потенциал на оси диска  $\rho = 0$ :

$$\varphi(0, z) = q \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{kR} e^{-|z|k} J_0(0) dk = \frac{q}{R} \operatorname{arctg} \frac{R}{z};$$

б) потенциал в плоскости диска:  $\varphi(\rho, 0) = (q/R) \arcsin(q/R)$ ,  $\varphi(\rho, 0) = V$  для  $\rho \leq R$ .

Поверхностная плотность заряда на диске может быть вычислена с учетом граничного условия  $E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma$ , а т.к.  $E_{2n} = -E_{1n}$ , то  $E_{2n} = -2\pi\sigma$ . В результате

$$\sigma(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{q}{2\pi R} \int_0^\infty \sin(kR) J_0(k\rho) dk. \quad (75)$$

Интеграл в (75) является известным разрывным интегралом [4], тождественно равным нулю при  $\rho > R$ , а при  $\rho < R$  значение интеграла равно:

$$\sigma(\rho) = \frac{q}{2\pi R} \frac{1}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}.$$

**Комментарий:** интегрируемая особенность в  $\sigma$  при  $\rho \rightarrow R$  связана с предположением о бесконечно малой толщине диска.

**Задание на дом:** решить задачи 2.13–2.15 на стр 33.

## 1.6 Метод изображений.

Данный метод используется в тех задачах, в которых требуется определить поле одного или нескольких точечных зарядов при условии заданности поля на некоторых поверхностях. Суть метода изображений состоит в подборе эффективной системы точечных зарядов, которые обеспечивают требуемые граничные условия. Эти заряды называются "зарядами-изображениями". Заряды - изображения, как правило, находятся вне объема пространства, где определяется поле, поскольку потенциал создаваемого ими поля должен удовлетворять уравнению Лапласа в этом объеме.

В качестве простейшего примера можно рассмотреть точечный заряд вблизи бесконечной проводящей проволоки, имеющей нулевой потенциал (см. решение примера 1.4.1). В этом случае заряд  $q$  в точке  $\vec{a}$  есть заряд-изображение.

**Пример 1.6.1** Найти поле, создаваемое зарядом  $q$ , расположенным на расстоянии  $l$  от центра заземленной металлической сферы радиуса  $R$ . Определить распределение индуцированного заряда на поверхности сферы и полный индуцированный заряд.

Условие заземленности сферы означает равенство нулю ее потенциала. Допустим, что можно ввести один фиктивный заряд  $q_x$  для удовлетворения условия  $\varphi(R, \theta, \varphi) = 0$ . Из симметрии системы ясно, что он может быть расположен на оси  $0z$ . Однако величина и местоположение данного заряда на оси  $0z$  заранее не известны. Обозначим радиус-вектор заряда  $q_x$  через  $l_x \vec{\mathbf{k}}$ ,  $\vec{\mathbf{k}}$  — единичный вектор по оси  $z$ . Тогда поле в произвольной точке пространства определяется выражением (см. рис 10):

$$\varphi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{q}{r_1} + \frac{q_x}{r_2}.$$

По определению:  $\vec{\mathbf{r}}_1 = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{k}}l$  и  $\vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{k}}l_x$  или  $r_1 = \sqrt{r^2 - 2l\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}} + l^2}$ ,  $r_2 = \sqrt{r^2 - 2\vec{\mathbf{k}}\vec{\mathbf{r}}l_x + l_x^2}$ . На поверхности сферы должно выполняться:

$$\varphi(R, \theta, \varphi) = \frac{q}{\sqrt{R^2 - 2Rl \cos \theta + l^2}} + \frac{q_x}{\sqrt{R^2 - 2Rl_x \cos \theta + l_x^2}} = 0. \quad (76)$$

Приводя последнее выражение к общему знаменателю, получим:

$$q_x^2(R^2 - 2Rl \cos \theta + l^2) = q^2(R^2 - 2Rl_x \cos \theta + l_x^2).$$

Так как (76) имеет место при любых значениях угла  $\theta$ , имеем:

$$q_x^2(R^2 + l^2) = q^2(R^2 + l_x^2); \quad 2q_x^2 Rl = 2q^2 Rl_x. \quad (77)$$

Решая данную систему относительно  $q_x$  и  $l_x$ , получаем:

$$q_x = -q \frac{R}{l}; \quad l_x = \frac{R^2}{l}. \quad (78)$$

В результате поле в произвольной точке пространства есть:

$$\varphi_{ql}(r, \theta, \varphi) = \frac{q}{\sqrt{r^2 - 2rl \cos \theta + l^2}} - \frac{q_x}{\sqrt{r^2 - 2rl_x \cos \theta + l_x^2}}. \quad (79)$$

Для определения плотности индуцированного заряда воспользуемся граничным условием:

$$E_{2n} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 4\pi\sigma. \quad (80)$$

Подставляя (79) в (80), получим:

$$\sigma = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi_{ql}}{\partial r} \Big|_{r=R} = - \frac{1}{4\pi R} \frac{q(l^2 - R^2)}{(R^2 - 2Rl \cos \theta + l)^{3/2}}. \quad (81)$$

Полный индуцированный заряд может быть найден интегрированием по поверхности сферы.

$$q. = \oint \sigma dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = -q \frac{R}{l}, \quad (82)$$

т.е. полный индуцированный заряд на поверхности сферы равен величине заряда-изображения.

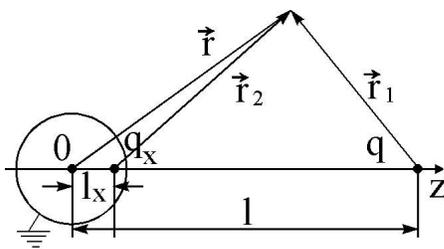


Рис. 10:

**Комментарий:** если точечный заряд  $q$  находится внутри сферы, нужно лишь изменить знак на противоположный в выражении (81) для  $\sigma$ , поскольку внешняя нормаль к проводнику направлена теперь к центру сферы.

Угловое распределение поверхностного заряда аналогично найденному, но полный наведенный заряд равен  $-q$ .

**Пример 1.6.2.** Точечный заряд  $q$  расположен на расстоянии  $l$  от центра заряженной до величины  $Q$  сферы радиуса  $R$ . Найти потенциал электростатического поля вне сферы [5].

Для нахождения решения воспользуемся принципом суперпозиции и решением предыдущей задачи. Представим, что проводящая сфера заземлена. Тогда  $q' = -qR/l$  - полный заряд на сфере, на основании (82). Разомкнем заземляющий провод и внесем на сферу заряд  $Q - q'$ . Полный заряд на сфере при этом станет равным  $Q$ . Очевидно, однако, что внесенный дополнительный заряд  $Q - q'$  равномерно распределится по поверхности сферы, поскольку электростатическое поле заряда  $q$  уже уравновешено зарядом  $q'$ . Таким образом, вне сферы потенциал дополнительного заряда  $Q - q'$  равен точечному потенциалу той же величины, расположенному в центре сферы. На основании принципа суперпозиции с учетом (79)

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = \varphi_{ql}(r) + \frac{Ql + Rq}{lr}, \quad (83)$$

где  $\varphi_{ql}$  определяется выражением (79).

**Пример 1.6.3.** Точечный заряд расположен на расстоянии  $l$  от центра сферического проводника радиуса  $R$  с заданным потенциалом  $V$ . Найти поле вне проводника [5].

Очевидно, что  $V$  имеет вид (83) с той лишь разницей, что  $Q - q'$  заменяется на  $VR$ . Действительно, как видно из (83) и (79),  $\varphi_{ql} = 0$ , а член  $(Q - q')/R =$

$VR/R = V$ . Таким образом,

$$\varphi(r, \theta, \varphi) = \varphi_{ql}(r) + \frac{VR}{r}.$$

**Пример 1.6.4.** *Проводящая сфера радиуса  $R$  помещена в однородное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$ . Найти поле в любой точке пространства [5].*

Под действием внешнего поля заряды проводника перераспределяются по поверхности. Очевидно, что на поверхности проводника поле имеет только нормальную составляющую, т.е. наличие проводника делает поле неоднородным. Для определения поля воспользуемся искусственным приемом описания  $\vec{E}_0$  с помощью двух точечных зарядов (см. рис. 11) [5]. Можно считать, что однородное поле создано зарядами  $\pm Q$ , расположенными в бесконечно удаленных точках. Действительно, если  $R$  конечно, но велико, имеем:

$$E \simeq 2 \frac{Q}{z^2} \cos \alpha \simeq \frac{2Q}{z^2}.$$

В пределе  $z \rightarrow \infty$ ,  $Q \rightarrow \infty$  при условии  $Q/z^2 = \text{const}$  данное приближение становится точным.

Поместим проводящую сферу в начало координат. Поле будет определяться по принципу суперпозиции полями реальных зарядов  $\pm Q$ , находящихся на расстоянии  $\pm z$ , и полем зарядов изображений, равных  $\pm Q R/z$  и расположенных в точках  $z^* = \pm R^2/z$  (см. пример 1.6.2). Полный потенциал равен:  $\varphi = \varphi_{Q,-|z|} + \varphi_{-Q,|z|}$ , где  $\varphi_{q,l}$  определено выражением (79). При условии  $|z| \rightarrow \infty$ , разлагая  $\varphi$  в ряд, найдем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q}{|z|} \left[ 1 - \frac{r}{|z|} \cos \theta \right] - \frac{Q}{|z|} \left( 1 + \frac{r}{|z|} \cos \theta \right) + Q \frac{R}{|z|} \left( 1 + \frac{R^2}{r|z|} \cos \theta \right) - \\ &\quad - Q \frac{R}{|z|} \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{R^2}{z^2} \cos \theta \right) = \frac{2Q}{z^2} (r - R^3/r^2) \cos \theta. \end{aligned}$$

Вычисляя предел данного выражения, получим:

$$\lim_{Q \rightarrow \infty, z \rightarrow \infty} \left( -\frac{2\theta}{z^2} \right) \left( r - \frac{R^3}{r^2} \cos \theta \right) = -E_0 r \cos \theta \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right).$$

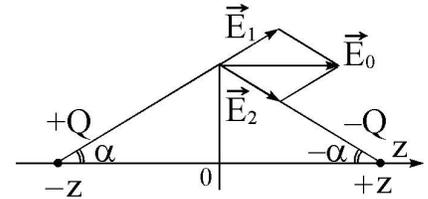


Рис. 11:

Соответственно выражение для напряженности поля есть

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{E}} &= -\text{grad } \varphi = - \left[ \vec{\mathbf{a}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\mathbf{a}}_\varphi \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{\mathbf{a}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] (-Er \cos \theta) \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) = \\ &= \vec{\mathbf{a}}_r E_0 \left( 1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta - \vec{\mathbf{a}}_\theta E_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta.\end{aligned}$$

Поверхностная плотность заряда равна:  $\sigma = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{3}{4\pi} E_0 \cos \theta$ .

**Комментарий:** так как интеграл от поверхностной плотности заряда равен нулю, безразлично, заряжена сфера или изолирована.

**Задание на дом:** решить задачи 2.16–2.18 на стр. 33.

### 1.7 Дипольный момент. Тензор квадрупольного момента. Поле системы зарядов на больших расстояниях

Скалярный потенциал произвольной системы зарядов на больших расстояниях определяется следующим выражением:

$$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{(\vec{\mathbf{d}}\vec{\mathbf{r}})}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta + \dots \quad (84)$$

Здесь  $q$  — полный заряд системы,  $\vec{\mathbf{d}}$  — дипольный момент системы:

$$\vec{\mathbf{d}} = \int \vec{\mathbf{r}} \rho(\vec{\mathbf{r}}) dV \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^N q_i \vec{\mathbf{r}}_i, \quad (85)$$

$Q_{\alpha\beta}$  — тензор квадрупольного момента.

$$Q_{\alpha\beta} = \int (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(r) dV \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^N q_i \left[ 3x_\alpha^{(i)} x_\beta^{(i)} - r^{(i)2} \delta_{\alpha\beta} \right]. \quad (86)$$

**Пример 1.7.1** Плотность заряда в одном из возбужденных состояний атома водорода в сферических координатах имеет вид:

$$\rho = \rho_0 r^4 e^{-\lambda r} \sin^4 \theta,$$

где  $\rho_0, \lambda = \text{const}$ . Вычислить  $\vec{\mathbf{d}}$  и  $Q_{\alpha, \beta}$ .

По определению дипольного момента (85):

$$\vec{\mathbf{d}} = \int \rho(r) \vec{\mathbf{r}} dV = \int \rho [\vec{\mathbf{i}}x + \vec{\mathbf{j}}y + \vec{\mathbf{k}}z] dV = \sum_{\alpha=1}^3 \vec{\mathbf{e}}_\alpha d_\alpha.$$

Вычисление компонент  $d_\alpha$  дает значение, равное нулю, т.к. вычисляются интегралы от нечетных функций в симметричных пределах, т.е.  $\vec{\mathbf{d}} = 0$ .

Для вычисления компонент тензора квадрупольного момента воспользуемся формулой (86). При  $\alpha = \beta = 1$  получим:

$$\begin{aligned} Q_{11} = Q_{xx} &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r)[3x^2 - r^2]r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \rho_0 \int_0^\infty r^8 e^{-\lambda r} dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^4 \theta (3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1) \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (87)$$

Для интегрирования по углу  $\varphi$  воспользуемся выражением:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) = \pi.$$

В результате для (87) после интегрирования по  $\varphi$  и замены переменных интегрирования  $u = \lambda r$ ,  $x = \cos \theta$  находим:

$$Q_{xx} = \frac{\rho}{\lambda^9} \int_0^\infty u^8 e^{-u} du \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^2 [3\pi(1 - x^2) - 2\pi] dx = \frac{\rho_0}{\lambda^9} 8! 2\pi \frac{32}{15 \cdot 7}.$$

Аналогичные вычисления для  $Q_{yy}$  дают:  $Q_{yy} = Q_{xx}$ , а для  $Q_{zz} = -2Q_{xx}$  при  $\alpha \neq \beta$   $Q_{\alpha\beta}$  равен нулю.

**Пример 1.7.2.** Полусфера радиуса  $R$  заряжена с постоянной объемной плотностью  $\rho$ . Определить компоненты дипольного и тензора квадрупольного моментов.

Выбирая систему координат в центре полусферы, получим  $d_x = d_y = 0$ . Соответственно для  $d_z$ :

$$d_z = \int \rho z r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{3}{8} QR,$$

где  $Q$  — полный заряд полусферы:  $Q = \rho \frac{2}{3} \pi R^3$ ,  $Q_{xx}$  — компонента тензора квадрупольного момента:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho(3x^2 - r^2)r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (3 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1) \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что равны нулю и другие компоненты тензора  $Q_{\alpha\beta}$ .

**Пример 1.7.3** Цилиндр высоты  $H$  и радиуса  $R$  заряжен с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ . Определить  $Q_{xx}$  элемент тензора квадрупольного момента такой системы зарядов.

По определению для  $Q_{xx}$  в системе координат, связанной с осью цилиндра, находим:

$$Q_{xx} = \rho_0 \int_0^R \int_0^H \int_0^{2\pi} [3\rho^2 \cos^2 \alpha - (\rho^2 + z^2)] \rho d\rho dz d\alpha = \frac{\rho_0 \pi H R^4}{4} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{H}{R} \right)^2 \right].$$

**Пример 1.7.4.** Определить поле системы точечных зарядов (см. рис.12) на больших расстояниях.

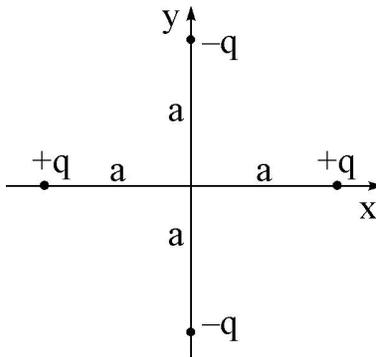


Рис. 12:

Для нахождения поля необходимо определить, какой величиной характеризуется данное распределение зарядов. В данном случае полный заряд системы равен нулю. Дипольный момент также равен нулю:

$$\vec{d} = q(-\vec{i}a) - q(\vec{j}a) + q(\vec{i}a) - q(\vec{j}a) = 0.$$

Определим компоненты квадрупольного момента, для примера:

$$Q_{11} = Q_{xx} = \sum_{i=1}^4 q_i (3x^{i2} - r^{i2}) = q2a^2 + qa^2 + q2a^2 + qa^2 = 6a^2q.$$

Аналогично вычисляются другие компоненты. В результате  $Q_{22} = -Q_{11}$ , а остальные компоненты равны нулю. Таким образом, на больших расстояниях поле имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{2r^5} (x^2 Q_{xx} + y^2 Q_{yy}) = -\frac{3a^2q}{r^3} \sin^2 \theta (1 - 2 \cos^2 \varphi),$$

где  $r, \theta, \varphi$  — переменные сферической системы координат.

**Пример 1.7.5.** Начало декартовой системы координат совпадает с центром тонкого кольца радиуса  $R$ . Найти поле на больших расстояниях от кольца с точностью до квадрупольных слагаемых, если кольцо заряжено с линейной плотностью  $\tau$ .

Полный заряд кольца равен:  $q = 2\pi\tau R$ . Дипольный момент

$$\vec{d} = \int \vec{r}\rho dV = \int_0^{2\pi} (\vec{i}x + \vec{j}y)\tau R d\alpha = 0.$$

Компоненты тензора квадрупольного момента:

$$Q_{xx} = \int [3x^2 - R^2]\tau R d\alpha = \int [3R^2 \cos^2 \alpha - R^2]\tau R d\alpha = \tau R^3 \pi.$$

Аналогично  $Q_{yy} = \tau R^3 \pi$ ,  $Q_{zz} = -\tau R^3 2\pi$  и  $Q_{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ . В результате для скалярного потенциала находим:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{1}{2r^5} \sum_{\alpha\beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \simeq \frac{Q}{r} + \frac{1}{2r^5} [x^2 Q_{xx} + y^2 Q_{yy}] =$$

$$= \frac{Q}{r} + \frac{\tau R^3 \pi}{2r^3} [1 - \cos^2 \theta]$$

**Пример 1.7.6.** Найти поле точечного диполя  $\vec{d} = \text{const}$ , расположенного в начале координат.

В этом случае  $\vec{P} = \vec{d}\delta(\vec{r})$ , и из решения уравнения (10) получим для вектора Герца электрического типа:  $\vec{\Pi} = \vec{d}/r$ . Отсюда:

$$\vec{E} = -4\pi\vec{d}\delta(\vec{r}) + \text{rot rot } \frac{\vec{d}}{r} = -4\pi\vec{d}\delta(\vec{r}) + \frac{3\vec{n}(\vec{n}\vec{d}) - \vec{d}}{r^3}.$$

**Задание на дом:** решить задачи 2.19–2.24 на стр. 34.

## 1.8 Силы и энергия в электростатическом поле

Величина	Формула
Энергия единицы объема $w$ и полная энергия $\varepsilon$ электростатического поля	$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{8\pi}; \quad \varepsilon = \int w dV. \quad (88)$
Сила, действующая на точечный заряд $\vec{E}$	$\vec{F} = q\vec{E} \quad (89)$
Сила, действующая на распределенный в пространстве заряд	$\vec{F} = \int \rho\vec{E} dV \quad (90)$
Сила, действующая на единицу поверхности проводника (давление)	$\vec{p} = \frac{E^2}{8\pi} \vec{n} \quad (91)$ $\vec{n}$ - нормаль к поверхности

Величина	Формула
Выражение для силы с использованием тензора натяжений Максвелла	$F = \oint \sum_k M_{kl} n_k dS, \quad (92)$ $M_{kl} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_k E_l - \frac{1}{2} E^2 \delta_{kl} \right]$ $\vec{n} \text{ — нормаль к } dS.$
Сила, действующая на дипольный момент в поле	$\vec{F} = (\vec{d} \cdot \text{grad}) \vec{E} \quad (93)$
Энергия заряда во внешнем поле	$q\varphi = \int \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}') dV \quad (94)$
Энергия системы зарядов	$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{ \vec{r}_i - \vec{r}_j } \quad (95)$
Энергия системы проводников	$\frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i \quad (96)$
Энергия диполя во внешнем поле	$- (\vec{d} \cdot \vec{E}) \quad (97)$
Энергия квадрупольного момента во внешнем поле со скалярным потенциалом $\varphi$	$\frac{1}{6} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 Q_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad (98)$

**Пример 1.8.1.** Заряд  $Q$  равномерно распределен по поверхности сферы радиуса  $R$ . Найти абсолютную величину силы, разрывающей сферу на две равные половины. Решить задачу двумя методами с использованием формул (91) и (92).

Данная система зарядов создает поле, равное нулю для  $r < R$ , и поле, совпадающее с полем точечного заряда  $Q/r^2$  для  $r > R$ .

*1 способ решения.* Выделим произвольную половину сферы. На элемент поверхности  $dS$  действует сила  $E^2 \vec{n} dS / 8\pi$ . Результирующая сила равна:

$$\vec{F} = \int \frac{E^2}{8\pi} \vec{n} dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{E^2}{8\pi} \vec{n} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Вычислим проекции этой силы на декартовы оси с учетом:  $n_x = \sin \theta \cos \varphi$ ,

$n_y = \sin \theta \sin \varphi$ . Например, для  $F_z$  имеем:

$$f_z = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{E^2}{8\pi} \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{Q^2}{8R^2}.$$

Проекции  $F_x = F_y = 0$ .

*2 способ решения.* В соответствии с (92) имеем:

$$F_z = \oint [M_{xz}n_x + M_{yz}n_y + M_{zz}n_z] dS.$$

Поверхность интегрирования включает половину сферы и основание. Однако интеграл по основанию равен нулю в силу  $M_{ik}=0$  для точек  $r < R$ . Таким образом,

$$F_z = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{E_x E_z}{4\pi} \sin \theta \cos \varphi + \frac{E_y E_z}{4\pi} \sin \theta \sin \varphi + \frac{E_z^2 - \frac{1}{2}E^2}{4\pi} \cos \theta \right] \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (99)$$

По определению на сфере  $E_x = Q \sin \theta \cos \varphi / R^2$ ,  $E_y = Q \sin \theta \sin \varphi / R^2$ ,  $E_z = Q \cos \theta / R^2$ . Подставляя  $E_k$  в (99), находим после выполнения интегрирования:  $F_z = Q^2 / 8R^2$ , как и при первом способе решения.

**Пример 1.8.2.** Шар радиуса  $R$  заряжен с объемной плотностью  $\rho = \text{const}$ . Найти силу, разрывающую шар на две равные половины. Решить задачу двумя методами.

На основании решения примера 1.2.2 известно, что поле такой системы зарядов есть

$$\vec{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\vec{r}, \quad r < R; \quad \vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{r^2}, \quad r > R \quad (100)$$

*1 способ решения.* В соответствии с (90) сила, действующая на единицу объема равна  $\rho\vec{E}$ . Следовательно, для определения суммарной силы, действующей на полусферу, надо проинтегрировать данное выражение по объему полусферы. При интегрировании получим, что  $F_x$  и  $F_y$  равны нулю. Соответственно для  $F_z$  находим:

$$F_z = \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho E(r) \cos \theta r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{3}{16} \frac{Q^2}{R^2},$$

где  $Q$  — полный заряд шара.

*2 способ решения.* На основании (92) необходимо интегрировать по замкнутой поверхности, которая в данном случае состоит из основания и поверхности полусферы. То есть интеграл разбивается на сумму двух

интегралов. При интегрировании по основанию для нормали к поверхности имеем  $n_x = 0$ ,  $n_y = 0$ ,  $n_z = -1$ . Интегрирование удобно выполнять в цилиндрической системе координат, в которой  $dS = \rho d\rho d\alpha$ ,

$$F_z^{(1)} = \int M_{zz} n_z dS = -\frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ E_z^2 - \frac{1}{2}(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) \right] \rho d\rho d\alpha.$$

С учетом (100) и соотношений  $E_x = E_0 \cos \alpha$ ,  $E_y = E_0 \sin \alpha$ ,  $E_z = 0$ ,  $E_0 = \frac{4}{3}\pi\rho^2$ ,  $\theta = \pi/2$  находим после интегрирования:  $F_z^{(1)} = Q^2/16R^2$ .

При интегрировании выражения (92) по поверхности сферы необходимо подставить  $n_x = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $n_y = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $n_z = \cos \theta$ . В результате

$$F_z^{(2)} = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} [M_{xz} \sin \theta \cos \varphi + M_{yz} \sin \theta \sin \varphi + M_{zz} \cos \theta]^2 R \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{Q}{8R^2},$$

где использованы выражения для тензора натяжений Максвелла:

$$M_{xz} = \frac{E_1^2}{4\pi} \sin \theta \cos \varphi \cos \theta; \quad M_{yz} = \frac{E_1^2}{4\pi} \sin \theta \sin \varphi \cos \theta; \quad M_{zz} = \left[ \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right] \frac{E_1}{4\pi}$$

Суммарная сила:  $F_z = F_z^{(1)} + F_z^{(2)} = 3Q^2/16R^2$ .

**Комментарий:** может показаться, что метод, основанный на использовании тензора натяжений Максвелла, весьма громоздок и неудобен. Однако преимущество этого метода проявляется там, где нет простой симметрии.

**Пример 1.7.3** Шар радиуса  $R$  однородно заряжен с объемной плотностью  $\rho = \text{const}$ . Определить энергию поля, создаваемого зарядами шара.

Напряженность поля определяется выражением (100). В соответствии с (88) полная энергия поля равна:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \left\{ \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \frac{Qr}{r^3} \right]^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi + \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \frac{Q}{r^2} \right]^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \right\} = \frac{3Q}{5R}$$

**Пример 1.8.4.** Потенциал внешнего электростатического поля имеет вид  $\varphi(x, y) = \alpha \exp[-\beta(x^2 - y^2)]$  и мало меняется по размеру квадруполь (см. рис.12 на стр 27). Найти энергию квадруполь в внешнем поле.

В соответствии с (98) и решением, приведенном в примере (1.7.4) , находим:

$$\varepsilon = \frac{1}{6} \sum_{\alpha\beta} Q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{1}{6} \left[ Q_{xx} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial x^2} + Q_{yy} \frac{\partial^2 \varphi(0)}{\partial y^2} \right] = 4\alpha\beta a^2 q.$$

**Задание на дом:** решить задачи 1.8.25–1.8.27 на стр. 35.

## 2 УПРАЖНЕНИЯ к гл. 1.

2.1. Найти  $\vec{E}$  и  $\varphi$  в любой точке пространства, создаваемые поверхностью, заряженной с плотностью  $\sigma = \text{const}$  а) сфера радиуса  $R$ , б) бесконечный цилиндр радиуса  $R$  (см. задачу N10 в [1]).

2.2. Плотность заряда атома водорода в основном состоянии равна:

$$\rho = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right), \quad 0 \leq r \leq \infty.$$

$a$  - боровский радиус,  $e$  - заряд электрона,  $r$  - расстояние от протона. Определить  $\vec{E}$  во всех точках пространства (см. задачу N12 в [1]).

2.3. Пространство между двумя концентрическими сферами радиусов  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ) заполнено сферически симметричным зарядом  $\rho = ar^n$ ,  $a = \text{const}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $r$  - расстояние от общего центра сфер. Найти  $\vec{E}$  и  $\varphi$  в любой точке пространства (см. задачу N13 в [1]).

2.4. Найти потенциал, создаваемой квадратной рамкой со стороной  $2a$ . Линейная плотность заряда сторон рамки  $\tau = \text{const}$ .

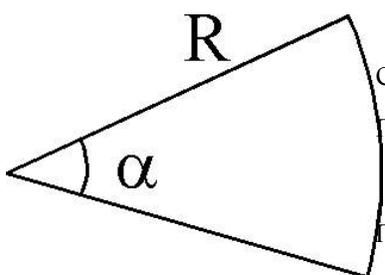


Рис. 13:

2.5. Найти потенциал, создаваемый заряженным сектором радиуса  $R$ , угол  $\alpha$ . Поверхностная плотность заряда  $\sigma = \text{const}$ . (рис 13)

2.6. Найти потенциал внутри сферы, одна половина которой заряжена с объемной плотностью  $\rho = \text{const}$  (см. задачу N10 в [1]).

2.7. Найти потенциал, создаваемый шаром радиуса  $R$ , одна половина которого заряжена с объемной плотностью  $\rho = ar$ , а вторая  $\rho = \text{const}$ ,  $a = \text{const}$ .

2.8. Цилиндр радиуса  $R$  и высоты  $H$  однородно заряжен с объемной плотностью  $\rho$ . Определить потенциал поля на оси симметрии цилиндра (см. задачу N28 в [1])

2.9. Внутри полусферы радиуса  $R$  распределен заряд с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 e^{\alpha r}$ . Найти  $\vec{E}$  в центре кривизны полусферы  $\rho_0$ ,  $\alpha = \text{const}$  (см. задачу N31 в [1]).

2.10. Две концентрические сферы, имеющие радиусы  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ), разделены на полусферы одной плоскостью. Верхняя внутренняя и

нижняя наружная полусферы находятся под потенциалом  $V = \text{const}$ . Две другие полусферы находятся под нулевым потенциалом. Найти потенциал в области  $R_1 \leq r \leq R_2$  в виде ряда по полиномам Лежандра, учитывая члены до 4-го мультиполя. Проверить правильность полученного решения, рассматривая частные случаи  $R_1 \rightarrow \infty$  и  $R_2 \rightarrow 0$  [5].

2.11. Поверхность полой проводящей сферы радиуса  $R$  разделена на четное число равных сегментов совокупностью плоскостей, проходящих через ось  $z$  и равноотстоящих по углу  $\varphi$  (корочки арбуза). Любые два соседних сегмента имеют равный по величине, но противоположный по знаку потенциал  $\pm V$ . Найти потенциал внутри сферы в общем случае  $2n$  сегментов [5].

2.12. Заряд равномерно распределен с поверхностной плотностью  $\sigma$  по поверхности сферы заряда  $R$ , за исключением сегмента у полюса, ограниченного конусом  $\theta = \alpha$ . Найти потенциал внутри сферической поверхности. Из полученного решения найти предельный случай  $\alpha = 0$  [5].

2.13. Грани параллелепипеда, кроме граней  $z = c$  и  $z = 0$ , поддерживаются под потенциалом, равным нулю. Потенциал грани  $z = c$  равен  $V_1 = \text{const}$ , а грани  $z = 0$ ,  $V_2 = \text{const}$ . Найти поле внутри параллелепипеда.

2.14. Потенциал на боковой поверхности цилиндра равен нулю. На верхней поверхности потенциал  $V = a\rho^2$ , а на нижней  $V = b\rho^3$ ,  $a$  и  $b = \text{const}$ . Найти потенциал внутри цилиндра. Радиус цилиндра  $R$ , высота  $H$ .

2.15. Боковая поверхность цилиндра поддерживается под постоянным потенциалом  $\varphi_0$ . Найти поле внутри цилиндра, если верхнее и нижнее основания цилиндра заземлены и их потенциал равен нулю. Радиус цилиндра  $R$ , высота  $H$ .

2.16. На расстоянии  $\alpha$  от бесконечного проводника находится точечный заряд. Определить поле вне проводника, силу притяжения заряда проводником, плотность индуцированного заряда на поверхности проводника.

2.17. Бесконечный проводник занимает три четверти пространства. На расстояниях  $a$  и  $b$  от его граней находится точечный заряд. Найти: поле вне проводника, плотность индуцированных зарядов на его поверхности и силу

притяжения заряда к проводнику.

2.18. На расстояниях  $l_1$  и  $l_2$  от центра заземленной металлической сферы радиуса  $R$  находятся точечные заряды  $q_1$  и  $q_2$ . Найти поле вне сферы, распределение индуцированного заряда на поверхности, полный индуцированный заряд, если радиусы-векторы зарядов  $q_1$  и  $q_2$  определяются углами в сферической системе координат  $\theta_1\varphi_1$  и  $\theta_2\varphi_2$ , соответственно.

2.19. Начало декартовой системы координат совпадает с центром основания кругового цилиндра радиуса  $R$  и высоты  $H$ , заряженного с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 r^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .  $\rho_0 = \text{const}$ . Определить скалярный потенциал на больших расстояниях от цилиндра с точностью до квадрупольных слагаемых.

2.20. Кольцо радиуса  $R$  разделено пополам. Одна половина кольца заряжена с линейной плотностью  $\tau_1$ , а вторая с  $\tau_2$ . Найти  $\varphi$  на больших расстояниях от кольца до квадрупольных слагаемых.

2.21. Начало координат декартовой системы совпадает с центром кривизны полусферы радиуса  $R$ . Определить поле на больших расстояниях от полусферы, заряженной с поверхностной плотностью  $\sigma$ , если основание полусферы заряжено с поверхностной плотностью  $\sigma_2 = \text{const}$ . Ограничиться точностью учета квадрупольных слагаемых.

2.22. Доказать, что дипольный момент электронейтральной системы зарядов не зависит от выбора начала отсчета системы координат, а тензор квадрупольного момента системы зарядов не зависит от выбора начала координат, если полный заряд и дипольный момент системы равны нулю.

2.23. Заряженная система характеризуется тензором квадрупольного момента  $Q_{\alpha\beta}$ . Найти напряженность поля в декартовых, цилиндрических, сферических координатах.

2.24. Полусфера радиуса  $R$  равномерно заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Используя мультипольное разложение  $1/|\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}'|$  по сферическим функциям  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , представить потенциал  $\varphi$  электростатического поля снаружи полусферы в виде разложения по мультипольным моментам

$$Q_m^l = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho r^l Y_{lm}(\theta, \varphi) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi.$$

2.25. Цилиндр радиуса  $R$  заряжен с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 r^n$ ,

$n = 0, 1, 2, \dots, \rho_0 = \text{const}$ . Найти силу, разрывающую цилиндр на две равные половины, которая приходится на единицу высоты цилиндра.

2.26. Сфера радиуса  $R$  заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma = \text{const}$ . Найти энергию электростатического поля (см. задачу N41 в [1]).

2.27. В одном из возбужденных состояний атома водорода плотность заряда определяется выражением

$$\rho = -\frac{e}{3^8 \pi a^7} r^4 e^{-\frac{2r}{3a}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta.$$

Здесь  $e$  — заряд электрона,  $a$  — боровский радиус  $a = h^2/me^2$ . Найти энергию взаимодействия протона с данным распределением заряда (использовать формулу 94, в которой  $\varphi$  положить равным потенциалу протона, расположенному в начале координат).

## Список литературы

- [1] *Алексеев А.И.* Сборник задач по классической электродинамике. М., 1977, 318 с.
- [2] *Варшалович Л.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л., 1975, 436 с.
- [3] *Прудников А.И., Бычков Ю.А., Марицев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981, 798 с.
- [4] *Градштейн Е.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971, 1108 с.
- [5] *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М., 1965, 722 с.
- [6] *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М., 1970, 712 с.
- [7] *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. М., 1970, 503 с.

## Содержание

<b>1</b>	<b>ЭЛЕКТРОСТАТИКА</b>	<b>1</b>
1.1	Общие формулы электростатики . . . . .	1

	36
1.2 Теорема Гаусса . . . . .	2
1.3 Решение задач электростатики методом интеграла Пуассона	6
1.4 Решение неоднородного уравнения Пуассона . . . . .	11
1.5 Уравнение Лапласа в декартовых и цилиндрических координатах . . . . .	16
1.6 Метод изображений. . . . .	21
1.7 Дипольный момент. Тензор квадрупольного момента. Поле системы зарядов на больших расстояниях . . . . .	25
1.8 Силы и энергия в электростатическом поле . . . . .	28
<b>2 УПРАЖНЕНИЯ к гл. 1.</b>	<b>32</b>

Составитель: профессор, д.ф.-м.н. Запрягаев Сергей Александрович