

Министерство общего и профессионального образования РФ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
Физический факультет
Кафедра теоретической физики

ЗАПРЯГАЕВ С. А.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА. Векторный анализ

Методические указания к практическим занятиям по курсу
"ЭЛЕКТРОДИНАМИКА"
для студентов 3-го курса дневного отделения

Рекомендовано Учебно Методическим- Объединением университетов РФ
в качестве учебного пособия

Воронеж
2000

1 СКАЛЯРЫ И ВЕКТОРЫ

1.1 Исходные определения

Скаляром называется величина, определяемая одним численным значением. **Вектором** называется величина, задаваемая численным значением и направлением в пространстве. Математическое изображение вектора есть: $\vec{A}$, или $\mathbf{A}$, или $\vec{A}$ (ниже используется обозначение - $\mathbf{A}$). Геометрически, вектор изображается отрезком прямой линии, направление которой совпадает с направлением величины A в данной точке, а длина (или **модуль вектора** $A = |\mathbf{A}|$) равна численному значению вектора (в определенных единицах измерения). Введено понятие **нулевой вектор** - это вектор, модуль которого равен нулю. Направление такого вектора не задано. Два вектора **равны** между собой, если модули их одинаковы и направления совпадают (обозначение $\mathbf{A} = \mathbf{B}$). Для векторов введен ряд математических операций (но не все в сравнении с числами). **Суммой** двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется вектор $\mathbf{C}$, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах (рис. 1.а). Суммой N векторов является вектор $\mathbf{C}$, замыкающий $N + 1$ - угольник,

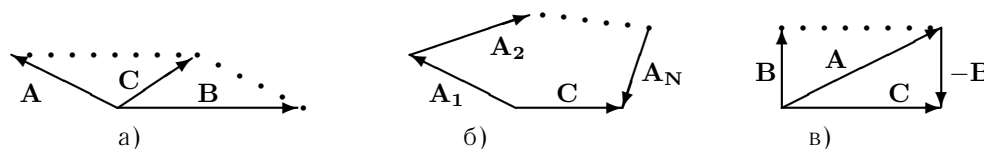


Рис. 1: Сложение векторов

построенный на слагаемых векторах (рис. 1.б). Из определения суммы векторов следует **коммутативность** $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ и **ассоциативность** $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ векторного сложения. Вектор называется **противоположным** заданному $\mathbf{A}$ (обозначается $-\mathbf{A}$), если модуль его равен $|\mathbf{A}|$, а направление прямо противоположно вектору $\mathbf{A}$. **Разностью** двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется сумма уменьшаемого вектора с вектором, противоположным вычитаемому $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ (рис. 1.в). **Проекция** вектора $\mathbf{A}$ на ось $\mathbf{e}$ есть число, равное:

$$A_e = A \cos \varphi \quad (1)$$

где φ - угол между направлением вектора $\mathbf{A}$ и положительным направлением оси $\mathbf{e}$. **Умножение вектора A на скаляр a** определяет вектор, модуль

которого равен $a \cdot A$, а направление совпадает с направлением вектора $\mathbf{A}$, если $a > 0$ и противоположно направлению вектора $\mathbf{A}$, если $a < 0$. Умножение вектора на число удовлетворяет соотношениям: $a(b \mathbf{A}) = (a \cdot b) \mathbf{A}$, $a(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = a \mathbf{A} + a \mathbf{B}$. **Линейно зависимыми** называются векторы, для которых выполняется равенство $\sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{A}_i = 0$, где α_i - числа, не все равные нулю. Два линейно зависимых вектора параллельны (**коллинеарны**) друг другу. Три линейно зависимых вектора лежат в одной плоскости (**компланарны**). Если три вектора линейно независимы, то любой вектор единственным образом разлагается по этим векторам. **Базисом** трехмерного пространства называется произвольная система трех линейно независимых векторов $\mathbf{e}_i$, $i \in 1 \div 3$. При заданном базисе для любого вектора имеем:

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{e}_k \quad (2)$$

Откладывая тройку базисных векторов из одной точки пространства (**начало координат**) и называя прямые, являющиеся продолжением $\mathbf{e}_k$, осями координат, получим косоугольную декартову систему координат. Если базисные векторы взаимно ортогональны и $|\mathbf{e}_k| = 1$, то они называются **ортами** прямоугольной декартовой системы координат. Часто используются следующие общепринятые обозначения $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}$ - орт оси X , $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j}$ - орт оси Y , $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$ - орт оси Z . **Радиус- вектор** точки ($\mathbf{r}$) - есть вектор, проведенный из начала координат к заданной точке пространства $\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. Здесь x, y, z - декартовы координаты точки. В дальнейшем будут использованы обозначения $x_1 \equiv x$; $x_2 \equiv y$; $x_3 \equiv z$. В результате $\mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}_k$. Модуль радиус вектора обозначается r и равен $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. **Единичный радиус- вектор** - есть вектор, равный $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

1.2 Произведения векторов

Для векторов определены два типа произведения - скалярное и векторное. **Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$** есть число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение двух векторов обозначается $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ или $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и по определению (1) равно произведению модуля одного вектора на проекцию

второго вектора на направление первого:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A B \cos(\widehat{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}) = A_B \cdot B = A \cdot B_A \quad (3)$$

По определению скалярное произведение коммутативно $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ и дистрибутивно $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$. На основании (3) проекция вектора на ось равна скалярному произведению орта оси на вектор. Из равенства скалярного произведения нулю следует взаимная ортогональность векторов. Орты прямоугольной декартовой системы координат ортогональны между собой $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$. Используя (2) для скалярного произведения (3), имеем

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{k,n=1}^3 A_k B_n (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_k) = \sum_{k=1}^3 A_k B_k \quad (4)$$

Векторным произведением двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется вектор, обозначаемый $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$, равный по величине произведению модулей векторов на синус угла между ними и направленный перпендикулярно плоскости векторов сомножителей в ту сторону, откуда поворот от первого сомножителя $\mathbf{A}$ ко второму $\mathbf{B}$ на меньший угол виден против хода часовой стрелки. Векторное произведение некоммутативно, так как $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = -[\mathbf{B} \times \mathbf{A}]$, но дистрибутивно $[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C})] = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + [\mathbf{A} \times \mathbf{C}]$. Из равенства $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{0}$ следует параллельность векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Векторное произведение имеет простой геометрический смысл: $|[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]|$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Векторное произведение ортов прямоугольной декартовой системы координат равно:

$$[\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad i, j \in 1, 2, 3 \quad (5)$$

ε_{ijk} - символ Леви-Чевита, равный нулю, если хотя бы два индекса совпадают; равный +1, если i, j, k образуют циклическую; и -1, если i, j, k образуют нециклическую перестановку от последовательности 1, 2, 3. В практических приложениях используются следующие соотношения для ε_{ijk}

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ikl} \cdot \varepsilon_{ist} = \begin{vmatrix} \delta_{ks} & \delta_{kt} \\ \delta_{ls} & \delta_{lt} \end{vmatrix}; \quad \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ikl} \cdot \varepsilon_{ikt} = 2\delta_{lt} \quad (6)$$

Определитель квадратной матрицы 3×3 можно представить в следующем виде:

$$\det A = ||A|| = \sum_{i,j,k=1}^3 A_{1i} A_{2j} A_{3k} \varepsilon_{ijk}. \quad (7)$$

Используя (2), (5), получаем общее выражение для вычисления векторного произведения:

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \sum_{i,j=1}^3 A_i B_j [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_i B_j \mathbf{e}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Смешанное произведение трех векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] &= \sum_{i,j,n=1}^3 A_n B_i C_j \mathbf{e}_n \cdot [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] = \sum_{i,j,n,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_n B_i C_j (\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_k) = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_k B_i C_j = \sum_{k,i,j=1}^3 \varepsilon_{kij} A_k B_i C_j = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что значение смешанного произведения не меняется при циклической перестановке векторов, входящих в него. Численно смешанное произведение равно объему параллелепипеда, построенного на векторах, входящих в произведение. Если любые два вектора в смешанном произведении одинаковы или параллельны, то такое произведение равно нулю. Наконец, если все три вектора лежат в одной плоскости, смешанное произведение также равно нулю. Таким образом, если для трех векторов $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] \neq 0$, то данные векторы образуют базис. При этом, если $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] > 0$, базис называется правым. Если $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] < 0$, базис называется левым. Используя (9), ε_{ijk} можно представить в следующем виде

$$\varepsilon_{ijk} = [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] \cdot \mathbf{e}_k \quad (10)$$

Двойное векторное произведение обозначается $[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]]$ и для его вычисления справедлива формула

$$\mathbf{D} \equiv [\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (11)$$

Для доказательства равенства (11) перепишем двойное векторное произведение с учетом (2), используя равенство (5), получим:

$$\mathbf{D} = \sum_{i,j,k=1}^3 A_i B_j C_k [\mathbf{e}_i \times [\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k]] = \sum_{i,j,k,l,n=1}^3 A_i B_j C_k \varepsilon_{ljk} \varepsilon_{lni} \mathbf{e}_n$$

Выполняя суммирование по l на основании (6) и (4), получим:

$$\mathbf{D} = \sum_{i,n=1}^3 (A_i B_n C_i - A_i B_i C_n) \mathbf{e}_n = \mathbf{B} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

1.3 Дифференцирование и интегрирование векторов

В общем случае векторы являются функциями скалярных или векторных величин. Например, зависимость $\mathbf{A}$ от скалярной величины t обозначают в виде $\mathbf{A}(t)$ и говорят, что задана вектор-функция $\mathbf{A}(t)$ от скалярного аргумента t . Изменение вектор-функции от скалярного аргумента графически изображается **годографом** вектора – кривой, описываемой концом вектора $\mathbf{A}$ при изменении t . **Производной** от $\mathbf{A}(t)$ по скалярному аргументу t называется предел

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

Такая производная направлена по касательной к годографу вектора. Если базис $\mathbf{e}_k$ не зависит от t , то

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \sum_{k=1}^3 \frac{dA_k}{dt} \mathbf{e}_k \quad (12)$$

Правила дифференцирования вектор-функции следуют из определения производной и в простейших случаях имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}; & \frac{d}{dt}(\varphi \mathbf{A}) &= \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{A} + \varphi \frac{d\mathbf{A}}{dt}; \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}; & \frac{d}{dt}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} \right] + \left[\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right] \end{aligned}$$

Если вектор $\mathbf{A}$ или скаляр зависят от радиус- вектора $\mathbf{r}$: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, т.е. являются функциями x, y, z , то вводятся специальные приемы дифференцирования.

Градиент скалярной функции (декартова система координат):

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (13)$$

Градиент скалярной функции имеет геометрическую интерпретацию, вытекающую из следующих рассуждений. Приращение $d\varphi$ при изменении $\mathbf{r}$ на $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$ равно с учетом (13):

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = (\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}) \quad (14)$$

Рассмотрим далее две точки, лежащие на поверхности $\varphi = \text{const}$ на расстоянии $d\mathbf{r}$ друг от друга. При перемещении из одной точки в другую

$d\varphi = 0$, следовательно, на основании (14) $\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = 0$. Отсюда $\text{grad } \varphi$ перпендикулярен поверхности $\varphi = \text{const}$ в любой точке. Если рассмотреть случай, когда $d\mathbf{r}$ направлен от одной поверхности $\varphi = c_1$ к соседней $\varphi = c_2$, то $d\varphi = \Delta c = \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}$. Для данного $d\varphi$, $|d\mathbf{r}|$ - минимален, если $d\mathbf{r}$ параллелен $\text{grad } \varphi$. Следовательно, *градиент скалярной функции есть вектор, указывающий направление максимальной скорости изменения функции φ .*

Дивергенция вектора (декартова система координат):

$$\text{div } \mathbf{b} = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial b_k}{\partial x_k} \quad (15)$$

Ротор вектора (декартова система координат):

$$\text{rot } \mathbf{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (16)$$

Операции $\text{grad } \varphi$, $\text{div } \mathbf{b}$, $\text{rot } \mathbf{b}$ можно записать единым образом, введя оператор "набла" - $\vec{\nabla}$, который в декартовой системе равен:

$$\vec{\nabla} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad \nabla^2 \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$$

В результате $\text{grad } \varphi \equiv \vec{\nabla} \varphi$, $\text{div } \mathbf{b} \equiv (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{b})$, $\text{rot } \mathbf{b} \equiv [\vec{\nabla} \times \mathbf{b}]$.

Среди интегральных соотношений важнейшее значение для векторного анализа имеют две теоремы. Теорема **Остроградского - Гаусса**:

$$\int_V \text{div } \mathbf{b} dV = \oint_S (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}) \equiv \oint_S b_n ds \quad (17)$$

Здесь S - поверхность, ограничивающая объем V , $\mathbf{n}$ - нормаль к поверхности. Интеграл по поверхности (в общем случае не замкнутой) вида $\oint \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}$ называется **поток**ом вектора $\mathbf{b}$ через поверхность.

Вторая теорема - теорема **Стокса**

$$\int_S \text{rot } \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s} = \oint_L \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}, \quad (18)$$

где S - поверхность, опирающаяся на контур L . Из (17) и (18) вытекают интегральные определения дивергенции вектора и проекции ротора вектора:

$$\text{div } \mathbf{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}; \quad (\text{rot } \mathbf{b})_n = \lim_{S_n \rightarrow 0} \frac{1}{S_n} \oint_L \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}, \quad (19)$$

где S_n -поверхность, ортогональная направлению нормали $\mathbf{n}$ и ограниченная контуром L .

Наконец, оператор ∇ можно представить в виде:

$$\vec{\nabla} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S d\mathbf{s} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{n} ds \quad (20)$$

1.4 УПРАЖНЕНИЯ к п. 1

1.1 Найти косинус угла между векторами $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1.2 Вычислить скалярное и векторное произведение векторов $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

1.3 Даны векторы $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Определить, какие два из них взаимно перпендикулярны, а какие параллельны или антипараллельны.

1.4 Определить вектор $\mathbf{A}$, модуль которого равен единице, перпендикулярный векторам $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

1.5 Четыре вектора $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ лежат в одной плоскости.

Показать, что $[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})] = 0$.

1.6 Показать, что $[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] + [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] + [\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = 0$.

1.7 Даны три вектора $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

Найти: $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$, $[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})]$, $[\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]$, $[\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})]$.

1.8 Даны векторы: $\mathbf{A} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Какую систему, правую или левую, образуют эти векторы?

1.9 Доказать, что базис декартовой системы координат правый.

1.10 Известны векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Представить вектор $\mathbf{A}$ в виде суммы двух векторов: $\mathbf{A}_{\parallel}$ -параллельном и $\mathbf{A}_{\perp}$ перпендикулярном к $\mathbf{B}$.

1.11 Вычислить градиент функции $f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \equiv f(r)$.

1.12 Вычислить $\text{div } \mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ -радиус-вектор).

1.13 Вычислить $\text{rot } \mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ -радиус-вектор).

1.14 Вычислить $\text{grad}(\sin(z) \cdot \sqrt{x^2 + y^2})$; $\text{grad}(\sin(x \cdot y \cdot z))$

1.15 Вычислить $\text{div } \mathbf{A}$ и $\text{rot } \mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A} = \frac{x \sin z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{y \sin z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} + \cos(z \sqrt{x^2 + y^2}) \mathbf{k}$$

2 ВРАЩЕНИЯ И ИНВЕРСИЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

2.1 Поворот системы координат

Рассмотрим две системы координат (x_1, x_2, x_3) , (x'_1, x'_2, x'_3) , у которых начало координат и оси x_3 и x'_3 совпадают, а оси x_1, x_2 , x'_1, x'_2 занимают положение в плоскости, как указано на рис 2.

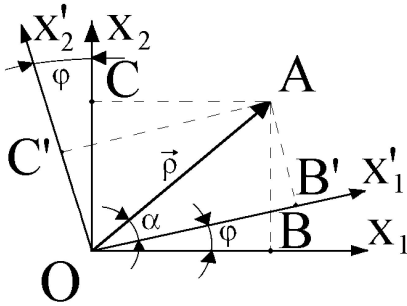


Рис. 2:

Таким образом, штрихованная система координат K' повернута относительно нештрихованной K на угол φ , вокруг совпадающих осей x_3, x'_3 . Найдем, как связаны координаты точки A в системах K, K' . Положение точки A определяется двумерным радиус-вектором $\vec{r}$. В системе K координаты A равны $OB = x_1$, $OC = x_2$, соответственно в K' $OB' = x'_1$, $OC' = x'_2$.

Из треугольника OAB имеем очевидные равенства : $x_1 = \rho \cos(\alpha + \varphi)$ и $x_2 = \rho \sin(\alpha + \varphi)$. Используя выражения для синуса и косинуса суммы двух углов с учетом определений $x'_1 = \rho \cos \alpha$ и $x'_2 = \rho \sin \alpha$, находим:

$$x_1 = x'_1 \cos \varphi - x'_2 \sin \varphi; \quad x_2 = x'_1 \sin \varphi + x'_2 \cos \varphi. \quad (21)$$

Или в матричном виде:

$$x_i = \sum_{k=1}^2 \beta_{ik} x'_k; \quad \beta \equiv \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Решая (21) относительно x'_1, x'_2 , получим:

$$x'_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_{ik} x_k; \quad \alpha \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (23)$$

α_{ik} имеют простую геометрическую интерпретацию. Это косинусы углов между " k "-ой осью нештрихованной (исходной) и " i "-ой осью штрихованной (повернутой) системы. Так $\alpha_{11} = \cos \varphi$, $\alpha_{12} = \sin \varphi = \cos(\pi/2 - \varphi)$, $\alpha_{21} = -\sin \varphi = \cos(\pi/2 + \varphi)$, $\alpha_{22} = \cos \varphi$.

Напомним некоторые определения из теории матриц. Правило умножения матриц: $(A \cdot B)_{ij} = \sum_k A_{ik} \cdot B_{kj}$

А вещественна, если $A^* = A$; **симметрична**, если $\tilde{A} = A$; **антисимметрична**, если $\tilde{A} = -A$; **эрмитова**, если $A^\dagger = A$; **ортогональна**,

Матрица	Компоненты
Транспонированная $\tilde{A}$	$(\tilde{A})_{ik} = A_{ki}$
Комплексно сопряженная A^*	$(A^*)_{ik} = A_{ik}^*$
Эрмитово сопряженная $A^\dagger$	$(A^\dagger)_{ik} = A_{ki}^*$
Обратная A^{-1}	$(A^{-1})_{ik} = A_{ki}/\det A$

если $A^{-1} = \tilde{A}$; **унитарна**, если $A^{-1} = A^\dagger$; **диагональна**, если $A_{ik} = \alpha_i \delta_{ik}$.
След (или **шпур** Sp) квадратной матрицы A есть сумма её диагональных элементов $\text{Sp } A = \sum_k A_{kk}$.

На основании (23) видно, что $\det \alpha = 1$ и $\alpha^{-1} = \tilde{\alpha}$, т.е. α вещественна и ортогональна. При сравнении α^{-1} и β из (22) видно, что $\alpha^{-1} = \beta$.

ПРИМЕР 2.1. *Выразить единичные векторы повернутой системы координат $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ через единичные векторы исходной системы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Системы координат повернуты относительно общей оси $\mathbf{e}_3$ на угол φ .*

По смыслу задачи необходимо представить векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ в виде

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}'_2 = a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2, \quad (24)$$

где необходимо найти коэффициенты a_{ij} . Для этого умножим скалярно первое равенство из (24) на $\mathbf{e}_1$. В силу ортогональности единичных векторов получим, что $a_{11} = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1) = \cos \varphi$. Умножив это же равенство на $\mathbf{e}_2$, находим $a_{12} = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1) = \cos(\pi/2 + \varphi) = \sin \varphi$. Аналогично определяем a_{21} и a_{22} из второго равенства в (24). Окончательно:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^2 \alpha_{ik} \mathbf{e}_k, \quad (25)$$

где матрица α определена в (23)

ПРИМЕР 2.2. *Поворот в трехмерном пространстве.*

Произвольный поворот координатной системы в трехмерном пространстве относительно начала координат полностью определяется заданием трех углов Эйлера α, β, γ . При этом утверждается, что поворот системы координат $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x'_1, x'_2, x'_3$ может быть получен с помощью трех последовательных поворотов:

- поворот вокруг оси x_3 на угол $\alpha (0 \leq \alpha < 2\pi)$ - рис 3.а.
- поворот вокруг новой оси x_2 на угол $\beta (0 \leq \beta < \pi)$ - рис 3.б.

- поворот вокруг новой оси x_3 на угол γ ($0 \leq \gamma < 2\pi$) - рис 3.в.

При повороте на угол α векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1''$, $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2''$ лежат в одной плоскости и их взаимное расположение (если смотреть против оси $\mathbf{e}_3$) показано на рис. 4.а. Аналогично при повороте на угол β векторы $\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_1'''$, $\mathbf{e}_3'', \mathbf{e}_3'''$ лежат в одной плоскости, как указано на рис. 4.б. (вид против оси $\mathbf{e}_2''$). И наконец, при повороте на угол γ векторы $\mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_2'$ лежат в одной плоскости, как указано на рис. 4.в. (вид против оси $\mathbf{e}_3'$).

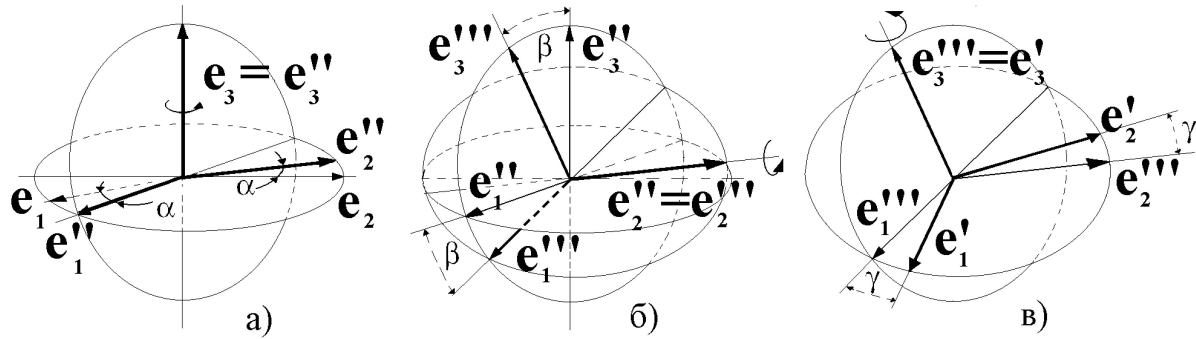


Рис. 3: Поворот в трехмерном пространстве

Выразим единичные векторы $\mathbf{e}_i''$ через $\mathbf{e}_k$ исходной системы координат. На основании (25) (см. также рис. 4.а) имеем:

$$\mathbf{e}_1'' = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2; \quad \mathbf{e}_3'' = \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{e}_2'' = -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2; \quad (26)$$

Выразим далее векторы $\mathbf{e}_i'''$ через векторы $\mathbf{e}_k''$, воспользовавшись соотношениями (25) (см. также рис. 4.б)

$$\mathbf{e}_1''' = -\sin \beta \mathbf{e}_3'' + \cos \beta \mathbf{e}_1''; \quad \mathbf{e}_2''' = \mathbf{e}_2''; \quad \mathbf{e}_3''' = \cos \beta \mathbf{e}_3'' + \sin \beta \mathbf{e}_1''; \quad (27)$$

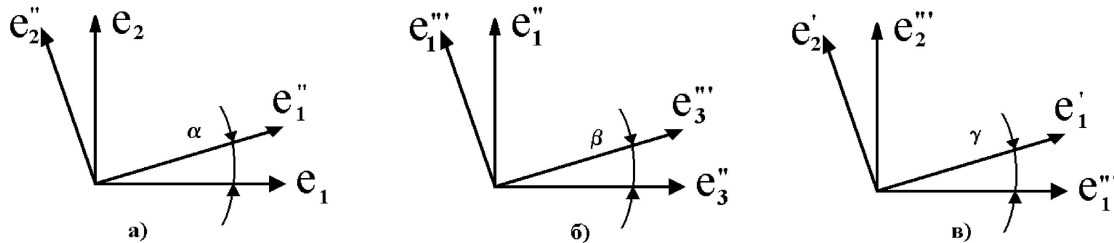


Рис. 4: Повороты в плоскости

Выразим, наконец, векторы, $\mathbf{e}_i'$ через $\mathbf{e}_i'''$ (см. также 25 и рис. 4.в)

$$\mathbf{e}_1' = \cos \gamma \mathbf{e}_1''' + \sin \gamma \mathbf{e}_2'''; \quad \mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3'''; \quad \mathbf{e}_2' = -\sin \gamma \mathbf{e}_1''' + \cos \gamma \mathbf{e}_2'''; \quad (28)$$

Подставим (27) в (28), а в полученный результат - (26). В результате найдем связь векторов $\mathbf{e}_i'$ и $\mathbf{e}_k$:

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{k=1}^3 R_{ik} \mathbf{e}_k, \quad (29)$$

где матрица R имеет вид

$$R = \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\cos \gamma \sin \beta \\ -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix} \quad (30)$$

Из (30) непосредственно следует, что $\det R = 1$ и кроме того $R^{-1} = \tilde{R}$, т.е. матрица R - ортогональна:

$$\left(R^{-1}\right)_{ki} = \left(\tilde{R}\right)_{ki} = R_{ik} \quad (31)$$

Преобразование, обратное (29), имеет вид:

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 \left(R^{-1}\right)_{ki} \mathbf{e}_i' = \sum_{i=1}^3 R_{ik} \mathbf{e}_i'. \quad (32)$$

Любой вектор можно представить в двух произвольных системах координат следующим образом:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^3 A_i' \mathbf{e}_i'. \quad (33)$$

Подставляя (32) в (33), находим:

$$\sum_{i,k=1}^3 A_k R_{ik} \mathbf{e}_i' = \sum_{i=1}^3 A_i' \mathbf{e}_i'$$

В силу ортогональности единичных векторов $\mathbf{e}_i'$ для проекций векторов получаем:

$$A_i' = \sum_{k=1}^3 R_{ik} A_k \quad (34)$$

Данная формула является окончательным результатом примера 2.2 и она устанавливает связь проекций произвольного вектора $\mathbf{A}$ в двух

системах координат. Важно отметить, что преобразование компонент вектора (34) при вращении координат есть линейное преобразование с ортогональной матрицей преобразования (30), определитель которой $\det R = 1$. Элементы матрицы R_{ik} есть косинусы углов между "k" -ой исходной и "i"- ой осью повернутой системы координат. В силу произвольности вектора **A** можно вообще определить трехмерный вектор как объект, имеющий три компоненты A_1, A_2, A_3 , преобразующиеся при вращении системы координат по закону (34). Это утверждение является конструктивным определением вектора в трехмерном пространстве, которое позволяет произвести обобщение понятия вектора на пространство с произвольным числом измерений.

Приведем вспомогательную формулу для R , которая потребуется ниже. Так как $R \cdot R^{-1} = 1$, а $R^{-1} = \widetilde{R}$, для элементов матрицы R_{ik} имеем:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^3 R_{ik}(R^{-1})_{kj} = \sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \sum_{k=1}^3 R_{ki} R_{kj} \quad (35)$$

ПРИМЕР 2.3. Доказать, что скалярное произведение $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ -скаляр (т.е. величина, не зависящая от поворота системы координат).

На основании (34), (35) имеем:

$$(\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}') = \sum_{k=1}^3 A'_k B'_k = \sum_{k,i,j=1}^3 R_{ki} R_{kj} A_i B_j = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} A_i B_j = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

ПРИМЕР 2.4. Определить компоненты тензора Леви-Чивита ε_{ijk} в повернутой системе координат, если в исходной системе ε_{ijk} определяется равенством (10)

По определению (10) с учетом (29) находим:

$$\varepsilon'_{ijk} = [\mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}'_j] \cdot \mathbf{e}'_k = \sum_{n,l,m=1}^3 R_{in} R_{jl} R_{km} \varepsilon_{nlm} \quad (36)$$

Непосредственными вычислениями найдем из (36), например, для

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{111} = & R_{11} (R_{12} R_{13} \varepsilon_{123} + R_{13} R_{12} \varepsilon_{132}) + R_{12} (R_{11} R_{13} \varepsilon_{213} + \\ & + R_{13} R_{11} \varepsilon_{231}) + R_{13} (R_{11} R_{12} \varepsilon_{321} + R_{12} R_{13} \varepsilon_{321}) = 0, \end{aligned}$$

так как $\varepsilon_{123} = -\varepsilon_{132}$; $\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{231}$; $\varepsilon_{321} = -\varepsilon_{312}$.

Аналогично $\varepsilon_{222}' = 0$ и $\varepsilon_{333}' = 0$. Точно также доказывается, что $\varepsilon_{iik}' = 0$ с любой парой двух одинаковых индексов. Остается рассмотреть шесть компонент, отличных от нуля. Например, ε_{123}' . С учетом (7)

$$\varepsilon_{123}' = \sum_{l,m,n=1}^3 R_{1l} R_{2m} R_{3n} \varepsilon_{lmn} = \det R = 1.$$

Таким же способом вычисляется из (36), что $\varepsilon_{231}' = \varepsilon_{321}' = -\varepsilon_{132}' = -\varepsilon_{213}' = -\varepsilon_{312}' = 1$, т.е. символ ε_{ijk} инвариантен во всех системах.

Получим вспомогательную формулу из (36). Для этого умножим левую и правую стороны данного равенства на $(R^{-1})_{\tau i}$ и $(R^{-1})_{\sigma j}$ и просуммируем по "i" и "j". На основании $\varepsilon_{ijk}' = \varepsilon_{ijk}$ и равенства (31) имеем:

$$\sum_{i,j=1}^3 R_{i\tau} R_{j\sigma} \varepsilon_{ijk} = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{\tau\sigma l} R_{kl}. \quad (37)$$

ПРИМЕР 2.5. Доказать, что векторное произведение векторов - вектор.

Для доказательства необходимо установить, что компоненты векторного произведения при вращении системы координат преобразуются по формуле (34). По определению векторного произведения (8) с учетом (37) получим:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}' \times \mathbf{B}']_k &= \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk}' A_i' B_j' = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sum_{\tau,\sigma=1}^3 R_{i\tau} R_{j\sigma} A_{\tau} B_{\sigma} = \\ &= \sum_{\tau,\sigma,l=1}^3 \varepsilon_{\tau\sigma l} R_{kl} A_{\tau} B_{\sigma} = \sum_{l=1}^3 R_{kl} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_l, \end{aligned}$$

т.е. компоненты $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ преобразуются в соответствии с (34), и, следовательно, $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$ - есть вектор.

ПРИМЕР 2.6. Является ли $\text{grad } \varphi$ - вектором?

"к"-ая компонента $\text{grad } \varphi$ есть $\partial\varphi/\partial x_k$. Закон преобразования этих компонент при поворотах системы координат следует из правила дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial x_i'} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} = \sum_{k=1}^3 A_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}, \quad (38)$$

так как $\varphi' = \varphi$. В результате необходимо установить связь матрицы A с матрицей R, определенной в (30). Так как компоненты радиус- вектора при

поворотах системы координат преобразуются по формуле

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j, \quad (39)$$

то можно записать следующее выражение для компонент R_{ik} (дифференцируя (39) по x_k): $R_{ik} = \partial x'_i / \partial x_k$. Однако в декартовой системе координат непосредственно можно установить, что

$$R_{ik} \equiv \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \equiv A_{ik} \quad (40)$$

Необходимо подчеркнуть, что есть системы координат, в которых равенство (40) не имеет места. В связи с этим вводят два класса векторов. Один класс образуют векторы, компоненты которых преобразуются при поворотах системы по закону, совпадающему с (34), т.е.

$$B'_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} B_k = \sum_{k=1}^3 R_{ik} B_k \quad (41)$$

Такие векторы называются **контравариантными**. Второй класс векторов, называемых **ковариантными**, образуют векторы, компоненты которых преобразуются при поворотах как градиент скаляра:

$$C'_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} C_k = \sum_{k=1}^3 A_{ik} C_k \quad (42)$$

Общепринято обозначать компоненты контравариантного вектора индексом сверху B^k , а ковариантного – индексом снизу C_k . В связи с такой условностью "правильно" писать R^i_k вместо R_{ik} и A_i^k вместо A_{ik} , т.е.

$$B^{i'} = \sum_{k=1}^3 R^i_k B^k; \quad C'_i = \sum_{k=1}^3 A_i^k C_k.$$

2.2 Инверсия системы координат

Можно указать две системы координат, которые не сводятся друг к другу поворотом (см., например, системы координат K и K' на рис. 5). Такие системы координат называют *правой* (K) и *левой* (K') соответственно. Как видно из рис. 5, системы отличаются положительным направлением осей. Преобразование одной системы координат к другой в этом случае называется **инверсией**.

Покажем, что при инверсии компоненты векторов преобразуются линейным преобразованием типа (34). Рассмотрим радиус-вектор в системах K и K' . Очевидно, что компоненты радиус вектора связаны равенством $x_k = -x'_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Или в матричном виде:

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 \beta_{ik} x_k; \quad \beta_{ik} = (-1) \delta_{ik} \quad (43)$$

Аналогично для векторов, образующих базис:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^3 \beta_{ik} \mathbf{e}_k = \sum_{k=1}^3 (-1) \delta_{ik} \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_i \quad (44)$$

Интересно, что элементы матрицы β_{ik} представляют собой косинусы углов между " k "-ой осью исходной и " i "-ой осью преобразованной системы координат. Из определения (43) ясно, что $\det \beta = -1$; $\beta^{-1} = \tilde{\beta} = \beta$.

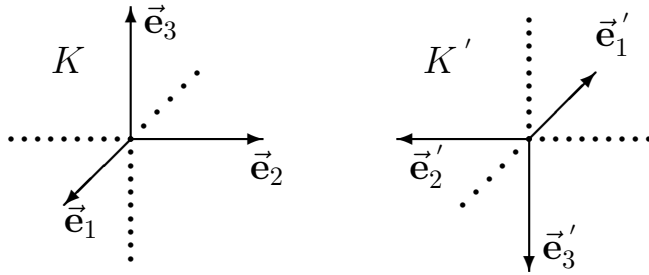


Рис. 5:

Оказывается, однако, что не все векторы при инверсии ведут себя как радиус-вектор (т.е. компоненты меняют знак!). В связи с этим векторы, компоненты которых при инверсии

меняют знак, называются **полярными** или **истинными** векторами, а векторы, компоненты которых при инверсии не меняют знак, называются **аксиальными** или **псевдовекторами**.

Рассмотрим поведение символа ε_{ijk} (10) при инверсии. По определению (10) с учетом (44) имеем:

$$\varepsilon_{ijk} = [\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j] \cdot \mathbf{e}_k = -[\mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}'_j] \cdot \mathbf{e}'_k$$

По определению векторного произведения в левой системе координат для векторов базиса $\mathbf{e}'_k$ получим $[\mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}'_j] = -\mathbf{e}'_k$! Поэтому в левой системе координат $\varepsilon'_{ijk} = -[\mathbf{e}'_i \times \mathbf{e}'_j] \cdot \mathbf{e}'_k$ имеет те же компоненты, что и ε_{ijk} , т.е. $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon'_{ijk}$ инвариантен и при инверсии! Отметим также, что при инверсии в соответствии с (44) преобразование для компонент ε_{ijl} имеет вид:

$$\varepsilon'_{ijl} = \sum_{k,m,n=1}^3 \beta_{ik} \beta_{jm} \beta_{ln} \varepsilon_{kmn} = \varepsilon_{ijl} \quad (45)$$

ПРИМЕР 2.7. Показать, что компоненты векторного произведения двух полярных векторов при инверсии не меняют знака.

На основании (8):

$$C'_\tau \equiv [\mathbf{A}' \times \mathbf{B}']_\tau = \sum_{n,m=1}^3 \varepsilon'_{\tau nm} A'_n B'_m = \sum_{n,m=1}^3 \varepsilon_{\tau nm} A_n B_m = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_\tau = C_\tau, \quad (46)$$

т.е. $C'_\tau = C_\tau$, и данное векторное произведение – аксиальный вектор.

В заключение отметим, что применение операции инверсии к скалярным величинам приводит также к двум типам скалярных величин, называемых *истинные скаляры* (при инверсии не меняют знака) и *псевдоскаляры* (при инверсии меняют знак).

2.3 УПРАЖНЕНИЯ к п. 2

2.1. Показать, что $(-y, x)$ образуют двумерный вектор.

2.2. Показать, что $(x, -y)$ не образуют двумерный вектор.

2.3. Удовлетворяют ли закону векторного преобразования величины: 1) $(x - y, x + y, 0)$ при повороте вокруг оси z , 2) $(0, 2z + y, z - 2y)$ при повороте вокруг оси x , 3) $(y^2 + z^2, -zy, -xz)$ при повороте вокруг каждой из координатных осей?

2.4. Показать, что $(xyC_x + y^2C_y, -x^2C_x - xyC_y)$ образуют двумерный вектор, если C_x и C_y – компоненты постоянного вектора.

2.5. Определить, являются ли функции $A_x = a_1(x^2 + y^2 + z^2)$, $A_y = a_2(x^2 + y^2 + z^2)$, $A_z = a_3(x^2 + y^2 + z^2)$ ($a_i = \text{const}$) компонентами вектора.

2.6. Составить все возможные независимые инварианты из полярных векторов $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ (единичные радиус-векторы) и псевдовектора $\mathbf{a}$.

2.7. Какие независимые псевдоскаляры можно составить из двух полярных векторов $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ и одного псевдовектора? Из трех полярных векторов?

2.8. Найти матрицу бесконечно малого поворота системы координат.

2.9. Определить тип вектора $\vec{\nabla}$ (полярный или аксиальный).

2.10. Определить тип вектора $\text{grad } \varphi$, где φ – скаляр (псевдоскаляр)

2.11. Определить тип скаляра $\text{div } \mathbf{a}$ и вектора $\text{rot } \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ – истинный (аксиальный) вектор.

2.12. Определить, какие из перечисленных величин являются скалярами, а какие псевдоскалярами: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$; $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$; $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]$; $\mathbf{A} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{F}]$; $\mathbf{D} \cdot [\mathbf{E} \times \mathbf{F}]$. Здесь $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ - истинные, а $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}$ - аксиальные векторы.

3 СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

3.1 Криволинейные координаты

Учет симметрии задачи приводит к необходимости использовать криволинейные координаты. Если декартовы координаты точки образуются пересечением трех взаимно перпендикулярных плоскостей $x_1 = x = const$, $x_2 = y = const$, $x_3 = z = const$, то в криволинейных координатах положение точки определяется пересечением трех произвольных поверхностей $q_1 = const$, $q_2 = const$, $q_3 = const$, которые и образуют систему координат. При этом всегда можно записать:

$$x_k = x_k(q_1, q_2, q_3); \quad q_k = q_k(x_1, x_2, x_3); \quad k = 1, 2, 3 \quad (47)$$

Каждой поверхности $q_k = const$ можно сопоставить единичный вектор $\mathbf{a}_k$, нормальный к поверхности $q_k = const$ и направленный в сторону возрастания q_k . Квадрат расстояния dl между двумя бесконечно близкими точками вычисляется по формуле:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \sum_{i,k=1}^3 h_{ik}^2 dq_i dq_k \quad (48)$$

Коэффициенты h_{ik}^2 называются коэффициентами Ламе. Они характеризуют заданную систему координат. Из соотношений (48), (47) следует выражение для h_{ik}^2 :

$$h_{ij}^2 = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \quad (49)$$

Если поверхности криволинейной системы взаимно перпендикулярны, то такие системы называются ортогональными и для них $h_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Полагая для ортогональных систем $h_{ii} \equiv h_i$, перепишем (48) в виде:

$$dl^2 = \sum_{k=1}^3 (h_k dq_k)^2 \quad (50)$$

Для любого заданного dq_k (считая остальные q_i постоянными) находим $dl_k = h_k dq_k$. Отсюда для элементов поверхности dS_{ij} и объема dV имеем:

$$dS_{ij} = dl_i dl_j = h_i h_j dq_i dq_j, \quad (51)$$

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3 \quad (52)$$

3.2 Дифференциальные векторные операции

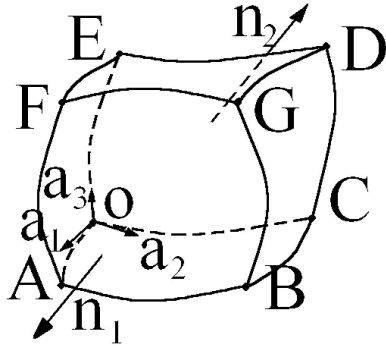


Рис. 6:

В данном параграфе получены выражения $\text{grad } f$, $\text{div } \mathbf{b}$, $\text{rot } \mathbf{b}$ в произвольной криволинейной ортогональной системе координат. По определению $\vec{\nabla} f$ -вектор, указывающий направление максимальной скорости изменения функции f в пространстве. Следовательно, компоненты $\vec{\nabla} f(q_1, q_2, q_3)$ в направлении,

ортогональном семейству поверхностей $q_i = \text{const}$, задаются выражением

$$(\vec{\nabla} f)_k = \frac{\partial f}{\partial l_k} = \frac{\partial f}{h_k \partial q_k} \quad (53)$$

В результате с учетом определения единичных векторов $\mathbf{a}_k$ получим для $\vec{\nabla} f$ в произвольной ортогональной криволинейной системе:

$$\vec{\nabla} f(q_1, q_2, q_3) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{a}_k \frac{\partial f}{\partial l_k} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{a}_k \frac{\partial f}{h_k \partial q_k} \quad (54)$$

Для нахождения $\text{div } \mathbf{b}$ воспользуемся выражением (19) и рассмотрим бесконечно малый криволинейный объем $V = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$ (рис. 6). Найдём поток вектора $\mathbf{b}$ через поверхность, ограничивающую данный объем:

$$\Phi = \oint (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}) = \sum_{k=1}^6 \int_{ds_k} (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}) = \sum_{k=1}^6 \Phi_k,$$

где ds_k определяются как поверхности криволинейной фигуры объемом V : $ds_1 = \text{поверхность } AFGB$, $ds_2 = OCDE$, $ds_3 = EFGD$, $ds_4 = OABC$,

$ds_5 = BCDG$, $ds_6 = EFAO$. Вычислим, например, поток вектора $\mathbf{b}$ через площадки ds_1 и ds_2 . В силу бесконечной малости V :

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &\equiv \Phi_1 + \Phi_2 = \int_{ds_1} (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}) + \int_{ds_2} (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{s}) \approx \\ &\approx b_1(ds_1) \cdot ds_1 - b_1(ds_2) \cdot ds_2\end{aligned}$$

Здесь b_1 – проекция $\mathbf{b}$ на $\mathbf{a}_1$ и, кроме того, учтено, что на ds_1 направление нормали $\mathbf{n}_1$ совпадает с положительным направлением $\mathbf{a}_1$, а на ds_2 , $\mathbf{n}_2$ противоположно $\mathbf{a}_1$. С учетом (51)

$$\Phi_{12} = \left(b_1 h_2 h_3\right)\Big|_{ds_1} \cdot dq_2 dq_3 - \left(b_1 h_2 h_3\right)\Big|_{ds_2} \cdot dq_2 dq_3 \quad (55)$$

Значение величины $b_1 h_2 h_3$ на поверхности ds_1 можно выразить через значение на поверхности ds_2 , если учесть, что $(b_1 h_2 h_3)$ на ds_1 отличается от $(b_1 h_2 h_3)$ на ds_2 координатой q_1 на величину dq_1 . Поэтому имеем:

$$\left(b_1 h_2 h_3\right)\Big|_{ds_1} \approx \left(b_1 h_2 h_3\right)\Big|_{ds_2} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(b_1 h_2 h_3\right)\Big|_{ds_2} dq_1 + \dots \quad (56)$$

Подставляя (56) в (55), находим:

$$\Phi_{12} \approx \frac{\partial}{\partial q_1} \left(b_1 h_2 h_3\right) dq_1 dq_2 dq_3 \quad (57)$$

Полностью аналогично вычисляются потоки вектора $\mathbf{b}$ через площадки ds_3 , ds_4 и ds_5 , ds_6 . В результате

$$\Phi = \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (b_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (b_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (b_3 h_1 h_2) \right] dq_1 dq_2 dq_3 \quad (58)$$

Подставляя (58) и V в (19), находим выражение для дивергенции в произвольной ортогональной криволинейной системе координат:

$$\text{div } \mathbf{b} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (b_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (b_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (b_3 h_1 h_2) \right]. \quad (59)$$

Комбинируя (54) с (59), для лапласиана $\nabla^2 f \equiv (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})f = \nabla \cdot (\nabla f)$ (т.е. $\mathbf{b} = \vec{\nabla} f$) в криволинейной ортогональной системе:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (60)$$

Чтобы получить выражение для $\text{rot } \mathbf{b}$, воспользуемся (19). Рассмотрим бесконечно малую поверхность OCDE (рис. 6). Тогда проекция ротора на направление вектора $\mathbf{a}_1$ есть

$$(\text{rot } \mathbf{b})_{a_1} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}). \quad (61)$$

Здесь $S = dl_2 dl_3 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$. Циркуляцию вектора $\mathbf{b}$ вдоль контура $L = OCDE$ представим в виде:

$$= \int_L (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}) = \sum_{k=1}^4 C_k = \sum_{k=1}^4 \int_{L_k} (\mathbf{b} \cdot d\mathbf{l}), \quad (62)$$

где $L_1 = OC$, $L_2 = CD$, $L_3 = DE$, $L_4 = EO$. В силу бесконечной малости S имеем:

$$\begin{aligned} C &\approx (\mathbf{b}_2 \cdot d\mathbf{l}_2)_{OC} + (\mathbf{b}_3 \cdot d\mathbf{l}_3)_{CD} - (\mathbf{b}_2 \cdot d\mathbf{l}_2)_{DE} - (\mathbf{b}_3 \cdot d\mathbf{l}_3)_{ED} = \\ &= (b_2 h_2)_{OC} dq_2 - (b_2 h_2)_{DE} dq_2 + (b_3 h_3)_{CD} dq_3 - (b_3 h_3)_{ED} dq_3. \end{aligned} \quad (63)$$

Учитывая бесконечно малые одного порядка, имеем:

$$(b_2 h_2)_{DE} \approx (b_2 h_2)_{OC} + \frac{\partial}{\partial q_3} (b_2 h_2) dq_3 + \dots; \quad (64)$$

$$(b_3 h_3)_{CD} \approx (b_3 h_3)_{ED} + \frac{\partial}{\partial q_2} (b_3 h_3) dq_2 + \dots$$

Подставляя (64) в (63) с учетом (61), находим:

$$(\text{rot } \mathbf{b})_{a_1} = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (b_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (b_2 h_2) \right].$$

Повторяя вычисления для бесконечно малых поверхностей $OEF A$ и $OABC$, находим $(\text{rot } \mathbf{b})_{a_2}$ и $(\text{rot } \mathbf{b})_{a_3}$ соответственно. Окончательно выражение для $\text{rot } \mathbf{b}$ имеет вид:

$$\text{rot } \mathbf{b} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 h_1 & \mathbf{a}_2 h_2 & \mathbf{a}_3 h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 b_1 & h_2 b_2 & h_3 b_3 \end{vmatrix}. \quad (65)$$

3.3 Цилиндрическая и сферическая системы координат

Данные системы координат, наряду с декартовой, имеют широкое применение в учебных физических задачах. В связи с этим ниже приведены все необходимые сведения об этих системах.

Цилиндрическая система образуется круговыми цилиндрами с осью z и радиусами ρ ; полуплоскостями, проходящими через ось z (под углом φ к плоскости xz); плоскостями, параллельными плоскости xy . Положение точки задается тремя координатами ρ, φ, z , область изменения которых: $0 \leq$

$\rho \leq \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty \leq z \leq \infty$. Связь декартовых и цилиндрических координат есть:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi, & z &= z; \\ \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \varphi &= \arctg \frac{y}{x}, & z &= z. \end{aligned} \quad (66)$$

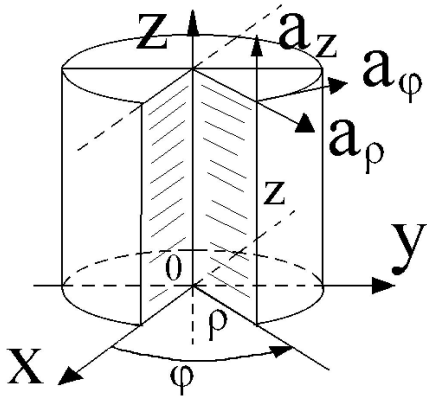


Рис. 7:

Коэффициенты Ламе в соответствии с (50) равны $h_1 = h_\rho = 1, h_2 = h_\varphi = \rho, h_3 = h_z = 1$. Единичные векторы $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$ направлены в сторону возрастания ρ, φ, z соответственно, и их направление зависит от положения (!) точки в пространстве. Из рис. 7 непосредственно видна связь $\mathbf{a}_\rho, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a}_\rho = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi; \quad \mathbf{a}_\varphi = -\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_\rho \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_\rho \sin \varphi + \mathbf{a}_\varphi \cos \varphi; \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_z \quad (67)$$

Данные формулы получаются аналогично формулам примера (2.1). Наконец, на основании результатов, полученных в разделе 3.2, имеем:

$$\text{grad } f = \mathbf{a}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mathbf{a}_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (68)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho b_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial b_z}{\partial z} \quad (69)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (70)$$

$$\text{rot } \mathbf{b} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_\rho & \rho \mathbf{a}_\varphi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_\rho & \rho b_\varphi & b_z \end{vmatrix} \quad (71)$$

Сферическая система. Образуется сферами радиуса r , поверхностями прямых круговых конусов с полярной осью z , полуплоскостями проходящими через ось z под углом φ к плоскости xz . Положение точки задается тремя координатами r, θ, φ , область изменения которых $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi$ см рис. 8.

Связь декартовых и сферических координат

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta; \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \varphi &= \arctg \frac{y}{x}, & \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned} \quad (72)$$

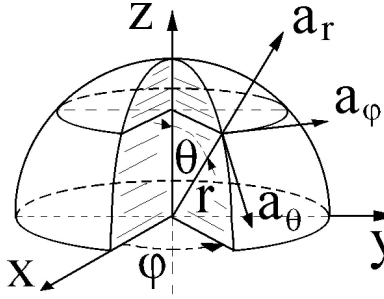


Рис. 8:

Коэффициенты Ламе имеют вид: $h_1 = h_r = 1$; $h_2 = h_\theta = r$; $h_3 = h_\varphi = r \sin \theta$. Единичные векторы $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\varphi$, $\mathbf{a}_\theta$ направлены в сторону возрастания r , φ , θ и меняют направление в зависимости от расположения точки в пространстве. Связь единичных векторов $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_\varphi = \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_\theta = \mathbf{a}_3$ с единичными векторами декартовой системы:

$$\mathbf{a}_k = \sum_{n=1}^3 D_{kn} \mathbf{e}_n; \quad D = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \end{vmatrix}. \quad (73)$$

Обратные преобразования:

$$\mathbf{e}_n = \sum_{k=1}^3 D_{kn} \mathbf{a}_k \quad (74)$$

В соответствии с результатами раздела 3.2:

$$\text{grad } f = \mathbf{a}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{a}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} + \mathbf{a}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}; \quad (75)$$

$$\text{div } \mathbf{b} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 b_r) + r \frac{\partial b_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta b_\theta) \right]; \quad (76)$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right]; \quad (77)$$

$$\text{rot } \mathbf{b} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin \theta \mathbf{a}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ b_r & r b_\theta & r \sin \theta b_\varphi \end{vmatrix}. \quad (78)$$

3.4 Взаимный базис. Ко- и контравариантные составляющие векторов

Если задан базис произвольной криволинейной системы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ (углы между векторами базиса произвольны!), то ему ставится в соответствие

базис, называемый **взаимным (биортогональным)**, обозначаемый $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ и определяемый равенством:

$$(\mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}_k) = \delta_{ik}. \quad (79)$$

Например: так как вектор $\mathbf{a}^1$ должен быть перпендикулярен векторам $\mathbf{a}^2$ и $\mathbf{a}^3$, то можно положить $\mathbf{a}^1 = \alpha[\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3]$. В свою очередь, скаляр α определяется из условия $\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = \alpha \mathbf{a}_1 \cdot [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3] = \alpha V = 1$, т.е.:

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{V}[\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3]; \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{V}[\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1]; \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{V}[\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2]. \quad (80)$$

Понятно, что формулы обратного преобразования имеют вид:

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{V}[\mathbf{a}^j \times \mathbf{a}^k], \quad (81)$$

где ijk образуют циклическую перестановку из $(1, 2, 3)$.

Так как один и тот же вектор $\mathbf{A}$ можно разложить как по векторам основного $\mathbf{a}_k$, так и взаимного базисов $\mathbf{a}^k$, т.е.:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^3 A^k \mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{a}^k, \quad (82)$$

вводится следующая терминология: числа A^k называются контравариантными, а A_k — ковариантными компонентами вектора $\mathbf{A}$ (данное определение находится в полном соответствии с определением ко- и контравариантных векторов, введенных в разделе 2.1). В соответствии с (79) и (82) для A^l и A_l имеем:

$$A^l = (\mathbf{a}^l \cdot \mathbf{A}) = \sum_{k=1}^3 A_k (\mathbf{a}^l \cdot \mathbf{a}^k), \quad A_l = (\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{A}) = \sum_{k=1}^3 A_k (\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{a}_k). \quad (83)$$

Если ввести обозначения $(\mathbf{a}^l \cdot \mathbf{a}^k) \equiv g^{lk} \equiv g^{kl}$; $(\mathbf{a}_l \cdot \mathbf{a}_k) \equiv g_{lk} \equiv g_{kl}$, то связь между ко- и контравариантными компонентами векторов будет иметь вид:

$$A_i = \sum_{k=1}^3 g_{ik} A^k; \quad A^i = \sum_{k=1}^3 g^{ik} A_k. \quad (84)$$

Девять величин g_{ik} (или g^{ik}) называются метрическим тензором. В случае любого ортогонального базиса взаимный базис совпадает с исходным! Поэтому ко- и контравариантные составляющие одинаковы и в этом случае нет необходимости вводить для них различие.

3.5 Циклические координаты

Во многих физических задачах широко используются так называемые циклические (или сферические! не путать с определением компонент вектора в сферической системе координат) координаты, ко- и контравариантные составляющие которых связаны с декартовыми координатами соотношениями:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy), & x_0 &= z, & x_{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy); \\ x^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy), & x^0 &= z, & x^{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy); \end{aligned} \quad (85)$$

Связь между x^μ и x_μ ($\mu = 0, \pm 1$) имеет вид:

$$x^\mu = (-1)^\mu x_{-\mu}; \quad x_\mu = (-1)^\mu x^{-\mu}; \quad x^\mu = x_\mu^*; \quad x_\mu = x^{\mu*}, \quad (86)$$

т.е. $g^{\mu\nu} = (-1)^\mu \delta_{\mu,-\nu}$; $g_{\mu\nu} = (-1)^\mu \delta_{\mu,-\nu}$. Соответственно определяются циклические ко- и контравариантные орты $\mathbf{e}_\mu$ и $\mathbf{e}^\mu$ ($\mu = 0, \pm 1$):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + i\mathbf{j}), & \mathbf{e}_0 &= \mathbf{k}, & \mathbf{e}_{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - i\mathbf{j}); \\ \mathbf{e}^1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - i\mathbf{j}), & \mathbf{e}^0 &= \mathbf{k}, & \mathbf{e}^{-1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + i\mathbf{j}). \end{aligned} \quad (87)$$

Связь данных ортов друг с другом следующая: $\mathbf{e}^\mu = (-1)^\mu \mathbf{e}_{-\mu}$, $\mathbf{e}_\mu = (-1)^\mu \mathbf{e}^{-\mu}$, $\mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\mu^*$, $\mathbf{e}^\mu = \mathbf{e}^{\mu*}$. Циклические орты образуют комплексный ортонормированный базис:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}^\nu) &= \delta_{\mu,\nu}, & \mu, \nu &= 0, \pm 1; \\ [\mathbf{e}_\mu \times \mathbf{e}_\nu] &= -i\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \mathbf{e}_\lambda; & [\mathbf{e}^\mu \times \mathbf{e}^\nu] &= i\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \mathbf{e}_\lambda, \end{aligned} \quad (88)$$

где $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ -тензор Леви-Чевита (см раздел 1.2 формула (5)).

3.6 УПРАЖНЕНИЯ к п. 3

3.1. Выразить циклические компоненты радиус-вектора через сферическую функцию.

3.2. Найти матрицу преобразования циклических компонент вектора при повороте системы координат на углы Эйлера.

3.3. Решить уравнение Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ в цилиндрической системе координат для случая $\varphi = \varphi(\rho)$

3.4. Решить уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ в цилиндрической системе координат для случая $\varphi = \varphi(\vec{\rho})$

3.5. Решить уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ в сферической системе координат для случая $\varphi = \varphi(r)$

3.6. Решить уравнение Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$ в сферической системе координат для случая $\varphi = \varphi(\vec{r})$

3.7. Выразить $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ в сферических координатах.

3.8. Доказать эквивалентность трех форм $\nabla^2 \psi(r)$ в сферических координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right), \quad \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\psi), \quad \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr}$$

4 ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

4.1 Применение оператора $\vec{\nabla}$

В предыдущих параграфах рассмотрены в основном операции дифференцирования первого порядка. Применяя эти операции вторично, получим операции дифференцирования второго порядка:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi) = \text{div grad } \varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi, \quad (89)$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A},$$

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}] = \text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0,$$

$$[\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi] = \text{rot grad } \varphi \equiv 0,$$

$$[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}]] = \text{rot rot } \mathbf{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}.$$

Вследствие линейности все рассмотренные операции для суммы функций применяются к каждому слагаемому отдельно:

$$\vec{\nabla}(\varphi + \psi) = \text{grad } (\varphi + \psi) = \text{grad } \varphi + \text{grad } \psi = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}\psi, \quad (90)$$

$$\vec{\nabla}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{B} = (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) + (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}),$$

$$[\vec{\nabla} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})] = \text{rot } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{B} = [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}] + [\vec{\nabla} \times \mathbf{B}],$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})) &= \text{grad div } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{grad div } \mathbf{A} + \text{grad div } \mathbf{B} = \\ &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{A}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2(\varphi + \psi) &= \Delta(\varphi + \psi) = \Delta\varphi + \Delta\psi = \nabla^2\varphi + \nabla^2\psi \\ \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})] \right] &= \text{rot rot } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{rot rot } \mathbf{A} + \text{rot rot } \mathbf{B} = \\ &= \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}] \right] + \left[\vec{\nabla} \times [\vec{\nabla} \times \mathbf{B}] \right].\end{aligned}$$

Важное значение имеет применение дифференциальных операций к произведениям типа: $\varphi\psi$, $\varphi\mathbf{A}$, $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, $[\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$. В этом случае необходимо применять данные операции отдельно к каждому сомножителю, считая другой сомножитель постоянным (это следует из определения операции дифференцирования). На первом этапе в учебных целях можно, например, птичкой "щ" указывать, на какой из сомножителей действует дифференциальная операция. Рассмотрим последовательно возможные дифференциальные операции от двух сомножителей:

$$\begin{aligned}\text{grad } (\varphi \cdot \psi) &= \vec{\nabla}(\varphi \cdot \psi) = \vec{\nabla}(\varphi \cdot \check{\psi}) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi, \quad (91) \\ \text{div } (\varphi \cdot \mathbf{A}) &= \vec{\nabla}(\varphi \cdot \mathbf{A}) = \vec{\nabla}(\varphi \cdot \check{\mathbf{A}}) + \vec{\nabla}(\varphi \cdot \check{\check{\mathbf{A}}}) = \mathbf{A} \cdot \text{grad } \varphi + \varphi \text{ div } \mathbf{A}, \\ \text{rot } (\varphi \cdot \mathbf{A}) &= \left[\vec{\nabla} \times (\varphi \cdot \mathbf{A}) \right] = \left[\vec{\nabla} \times (\varphi \cdot \check{\mathbf{A}}) \right] + \left[\vec{\nabla} \times (\varphi \cdot \check{\check{\mathbf{A}}}) \right] = \\ &= [\text{grad } \varphi \times \mathbf{A}] + \varphi \text{ rot } \mathbf{A}, \\ \text{grad } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \vec{\nabla}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \vec{\nabla}(\check{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{B}) + \vec{\nabla}(\mathbf{A} \cdot \check{\mathbf{B}}), \\ \text{div } [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= \vec{\nabla} \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \vec{\nabla} \cdot [\check{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}] + \vec{\nabla} \cdot [\mathbf{A} \times \check{\mathbf{B}}] = \\ &= \mathbf{B} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{B}, \\ \text{rot } [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] &= \left[\vec{\nabla} \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \right] = \left[\vec{\nabla} \times [\check{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}] \right] + \left[\vec{\nabla} \times [\mathbf{A} \times \check{\mathbf{B}}] \right] = \\ &= (\mathbf{B} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{A} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \mathbf{B}.\end{aligned}$$

Еще одним важным случаем, необходимым для приложений, является случай, когда функция φ или вектор $\mathbf{A}$ являются известными сложными функциями от $\mathbf{r}$. Правила вычисления в этом случае могут быть получены по определению:

$$\text{grad } \varphi(\tau(\mathbf{r})) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{e}_k \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \text{ grad } \tau, \quad (92)$$

$$\text{div } \mathbf{A}(\tau(\mathbf{r})) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \cdot \text{grad } \tau, \quad (93)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(\tau(\mathbf{r})) = \sum_{ijk=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = \sum_{ijk=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = - \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \times \operatorname{grad} \tau \right]. \quad (94)$$

ПРИМЕР 4.1. Получить формулы (92)-(94) с использованием интегрального определения оператора $\vec{\nabla}$.

По определению (20) для $\vec{\nabla} \varphi$ имеем:

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \varphi d\mathbf{S}. \quad (95)$$

В силу бесконечной малости V выразим φ на поверхности S через значение φ в точке B , к которой стягивается в пределе объем V :

$$\varphi \approx \varphi_B + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_B (\tau - \tau_B) + \dots$$

Учитывая, что $\oint d\mathbf{S} = 0$ (см (100)) получим, оставляя члены одного порядка малости:

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \left[\varphi_B + \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_B (\tau - \tau_B) + \dots \right] d\mathbf{S} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \tau d\mathbf{S} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \operatorname{grad} \tau.$$

Аналогично для $\operatorname{div} \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \left[\mathbf{A}_B + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B (\tau - \tau_B) + \dots \right] d\mathbf{S} = \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B \cdot \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint \tau d\mathbf{S} = \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B \cdot \operatorname{grad} \tau \end{aligned}$$

Соответственно для $\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ находим:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= [\vec{\nabla} \times \mathbf{A}] = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S [d\mathbf{S} \times \mathbf{A}] = \\ &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \left[d\mathbf{S} \times \left(\mathbf{A}_B + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B (\tau - \tau_B) + \dots \right) \right] = \\ &= \left[\lim_{V \rightarrow 0} \oint_S \tau d\mathbf{S} \times \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B \right] = \left[\operatorname{grad} \tau \times \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} \right|_B \right] \end{aligned}$$

4.2 Интегральные теоремы векторного анализа

Важнейшими теоремами векторного анализа являются теоремы Остроградского - Гаусса (17) и Стокса (18), из которых можно установить большое число вспомогательных соотношений. Положим, например, в (17) $\mathbf{b} = \varphi \mathbf{C}$, где $\mathbf{C}$ - постоянный вектор. В результате

$$\int_V \operatorname{div} (\varphi \mathbf{C}) dV = \int_V \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{C} dV = \oint_S \varphi \mathbf{C} \cdot d\mathbf{S}.$$

В силу того, что $\mathbf{C} = \text{const}$, последнее соотношение можно переписать в виде:

$$\left(\mathbf{C} \cdot \left[\int_V \text{grad } \varphi dV - \oint_S \varphi d\mathbf{S} \right] \right) = 0 \quad (96)$$

В силу произвольности вектора $\mathbf{C}$ находим окончательно:

$$\int_V \text{grad } \varphi dV = \oint_S \varphi d\mathbf{S} \quad (97)$$

Положим теперь в (17) $\mathbf{b} = [\mathbf{f} \times \mathbf{C}]$, где $\mathbf{C}$ - произвольный постоянный вектор:

$$\int_V \text{div} [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] dV = \int_V \mathbf{C} \cdot \text{rot } \mathbf{f} dV = \oint_S [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{C} \cdot [d\mathbf{S} \times \mathbf{f}]. \quad (98)$$

Представляя (98) в виде, аналогичном (96) в силу произвольности $\mathbf{C}$, находим:

$$\int_V \text{rot } \mathbf{f} dV = - \oint_S [\mathbf{f} \times d\mathbf{S}] = \oint_S [d\mathbf{S} \times \mathbf{f}]. \quad (99)$$

Следствиями из формул (17), (97), (99) являются следующие утверждения:

1) если векторное поле таково, что $\text{div } \mathbf{f} = 0$, то поток вектора через любую замкнутую поверхность равен 0;

2) если внутри области V $\text{div } \mathbf{f} = 0$ всюду, кроме некоторой точки, (где $\text{div } \mathbf{f}$ либо $\neq 0$, либо не существует!), то поток вектора $\mathbf{f}$ не зависит от вида поверхности интегрирования и равен 0 для поверхностей, не содержащих внутри себя эту точку и одинаков для поверхностей, охватывающих эту точку;

3) полагая $\varphi = \text{const}$ в (97), находим:

$$\oint d\mathbf{S} = \oint \mathbf{n} dS = 0 \quad (100)$$

4) если поле $\mathbf{b}$ таково, что $\text{rot } \mathbf{b} = 0$, то из (99)

$$\oint [\mathbf{b} \times d\mathbf{S}] = \oint [\mathbf{b} \times \mathbf{n}] dS = 0 \quad (101)$$

На основании теоремы Стокса (18) можно получить формулы, связывающие характеристики поля на незамкнутой поверхности с характеристиками этого поля на контуре, служащем границей поверхности. Положив в (18) $\mathbf{b} = \varphi \mathbf{C}$, где $\mathbf{C} = \text{const}$, аналогично выводу формул (97) и (99), найдем:

$$\int_S [d\mathbf{S} \times \text{grad } \varphi] = \int_S [\mathbf{n} \times \text{grad } \varphi] dS = \oint \varphi d\mathbf{l}. \quad (102)$$

Если выбрать в (18) $\mathbf{b} = [\mathbf{f} \times \mathbf{C}]$, то:

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot} [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] \cdot d\mathbf{S} &= \int_S [\vec{\nabla} \times \mathbf{b}] \cdot d\mathbf{S} = \int_S [d\mathbf{S} \times \vec{\nabla}] \cdot \mathbf{b} = \int [d\mathbf{S} \times \vec{\nabla}] \cdot [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] = \\ &= \int_S \mathbf{C} \cdot [d\mathbf{S} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{f}] = \oint_L [\mathbf{f} \times \mathbf{C}] \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{C} \cdot [d\mathbf{l} \times \mathbf{f}]. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\int_S [d\mathbf{S} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{f} = \int_S [\mathbf{n} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{f} dS = \oint_L [d\mathbf{l} \times \mathbf{f}]. \quad (103)$$

Если положить в (17) $\mathbf{b} = \varphi \vec{\nabla} \psi$, то получим так называемую первую формулу Грина:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{\nabla} \psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (104)$$

Если в (17) $\mathbf{b} = \varphi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \varphi$, получим вторую формулу Грина:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (105)$$

Необходимо отметить важное следствие из второй теоремы Грина: если внутри объема V , ограниченного поверхностью S , задана непрерывная вместе со вторыми производными функция φ , то можно определить значение φ в любой внутренней точке объема V при известных φ и ее нормальной производной $\partial \varphi / \partial n$ на S :

$$4\pi \varphi(A) = - \int_V \frac{1}{r} \Delta \varphi dV - \oint_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS. \quad (106)$$

Аналогично из (105) следует формула типа (106) для вектора $\mathbf{b}$:

$$4\pi \mathbf{b}(A) = - \int_V \frac{1}{r} \Delta \mathbf{b} dV - \oint_S \left\{ \mathbf{b} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} (\mathbf{n} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{b} \right\} dS. \quad (107)$$

4.3 Потенциальные, соленоидальные и Лапласовы векторные поля

Векторное поле называется **потенциальным**, если $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \varphi$. Величина φ называется **скалярным потенциалом** поля. Если потенциал φ поля $\mathbf{A}$ однозначная функция, то значение циркуляции вектора $\mathbf{A}$ не зависит от формы пути:

$$\int_C^D \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_C^D \vec{\nabla} \varphi \cdot d\mathbf{l} = \int_C^D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \int_C^D d\varphi = \varphi(D) - \varphi(C), \quad (108)$$

т.е. циркуляция вектора потенциального поля по замкнутому пути равна 0. Необходимым и достаточным условием того, чтобы поле было потенциальным, является равенство: $\text{rot } \mathbf{A} = 0$.

Векторное поле $\mathbf{B}$ называется **соленоидальным** (или **вихревым**), если $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Вектор $\mathbf{A}$ называется векторным потенциалом поля $\mathbf{B}$. Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является равенство: $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Векторное поле $\mathbf{A}$ называется **Лапласовым**, если в любой его точке выполняются равенства: $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, $\text{div } \mathbf{A} = 0$. **Лапласово поле является одновременно и потенциальным и соленоидальным. Лапласово поле полностью определяется скалярным потенциалом, удовлетворяющим уравнению Лапласа: $\Delta\varphi = 0$. Функции, удовлетворяющие уравнения Лапласа, называются гармоническими.**

ПРИМЕР 4.1. Показать, что функция $1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, является гармонической функцией всюду, кроме начала координат.

Для производных от $1/r$ по x_k ($k \in 1, 2, 3$) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x_k}{r^3}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_k^2 - r^2}{r^5}.$$

Складывая значения вторых производных, получим:

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 3r^2}{r^5} = 0, \quad (r \neq 0).$$

Следовательно, функция $1/r$ является гармонической функцией всюду, кроме начала координат по определению.

ПРИМЕР 4.2. Доказать равенство: $\Delta(1/r) = -4\pi \delta(\mathbf{r})$.

Рассмотрим интеграл:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{1}{k^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} = \frac{2}{\pi r} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{r}.$$

Вычислим действие оператора ∇^2 на функцию $\Phi(\mathbf{r})$

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) \equiv \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{1}{k^2} (ik)^2 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$$

что и требовалось доказать.

Основные свойства гармонических функций следующие.

1. Если внутри замкнутой поверхности S ψ - гармонична, то:

$$\oint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = 0. \quad (109)$$

Это свойство следует из (104), полагая $\varphi = \text{const}$.

2. Если φ и ψ - гармонические функции, то на основании (105)

$$\oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (110)$$

3. Если φ - гармонична, то на основании (106)

$$4\pi \varphi(A) = - \oint_S \left\{ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right\} dS. \quad (111)$$

В частном случае, если S - сфера радиуса R с центром в т. A , то

$$\varphi(A) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S \varphi dS, \quad (112)$$

так как по свойству 1 второй интеграл в (111) равен 0, а

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right)_{r=R} = -\frac{1}{R^2}.$$

Выражение (112) означает, что величина гармонической функции в т. A равна среднему значению этой функции на любой сфере с центром в т. A .

4. Гармоническая функция не имеет ни максимума, ни минимума внутри области гармоничности.

5. Гармоническая функция, постоянная на границе, постоянна и внутри области.

В заключение сформулируем теорему, которая называется **основной теоремой векторного анализа**: *любое непрерывное векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, заданное во всем пространстве и исчезающее на бесконечности вместе с $\text{div } \mathbf{A}$ и $\text{rot } \mathbf{A}$, может быть единственным образом (с точностью до векторной постоянной) представлено в виде суммы потенциального $\mathbf{A}_1$ и соленоидального $\mathbf{A}_2$ полей, т.е.*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_2(\mathbf{r}); \quad \text{div } \mathbf{A}_2 = 0, \quad \text{rot } \mathbf{A}_1 = 0. \quad (113)$$

4.4 УПРАЖНЕНИЯ к п. 4.

4.1. Вычислить $\text{div } \mathbf{r}$, $\text{rot } \mathbf{r}$, $\text{grad } (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})$, $(\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ - радиус вектор, $\mathbf{a} = \text{const}$ в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

4.2. Вычислить $\text{grad } \varphi(r)$, $\text{div}(\varphi(r)\mathbf{r})$, $\text{rot}(\varphi(r)\mathbf{r})$, $(\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla})\varphi(r)\mathbf{r}$.

4.3. Найти div , rot векторов: $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{b}$, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$, $[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$, $\varphi(r)[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$, $[\mathbf{r} \times [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]]$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} = \text{const}$.

4.4. Вычислить $\text{grad}(\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r})$, $\text{grad}(\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}))$, $\text{div}(\varphi(r)\mathbf{A}(\mathbf{r}))$, $\text{rot}(\varphi(r)\mathbf{A}(\mathbf{r}))$, $(\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla})(\varphi(r)\mathbf{A}(\mathbf{r}))$, где $\mathbf{a} = \text{const}$.

4.5. Вычислить $\text{grad}((\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})/r^3)$ и $\text{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{r}]/r^3$.

4.6. Доказать равенство:

$$\int_V [\mathbf{b} \text{div } \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{b}] dV = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} dS.$$

4.7. Доказать равенство:

$$\int_V \{[\mathbf{b} \times \text{rot } \mathbf{a}] + [\mathbf{a} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{b}\} dV = \oint_S [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} dS$$

4.8. Доказать равенство: $[(\mathbf{M} \times \vec{\nabla}) \times \mathbf{r}] = -2\mathbf{M}$.

4.9. Задан вектор $\Pi = \mathbf{d}(t-r/c)/r$, r - модуль радиус-вектора, $C = \text{const}$, t - скалярный параметр. Доказать, что:

$$\text{rot } \Pi = -\frac{1}{r^3}[\mathbf{r} \times \mathbf{d}(\tau)] - \frac{1}{r^2 c}[\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{d}}], \quad \tau = t - r/c;$$

$$\text{rot rot } \Pi = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3} + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}) - \dot{\mathbf{d}}}{c r^2} + \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 r}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}/r, \dot{\mathbf{d}} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{d}(\tau), \ddot{\mathbf{d}} \equiv \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathbf{d}(\tau).$$

Содержание

1	СКАЛЯРЫ И ВЕКТОРЫ	1
1.1	Исходные определения	1
1.2	Произведения векторов	2
1.3	Дифференцирование и интегрирование векторов	5
1.4	УПРАЖНЕНИЯ к п. 1	7
2	ВРАЩЕНИЯ И ИНВЕРСИЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ	8
2.1	Поворот системы координат	8
2.2	Инверсия системы координат	14
2.3	УПРАЖНЕНИЯ к п. 2	16

3	СИСТЕМЫ КООРДИНАТ	17
3.1	Криволинейные координаты	17
3.2	Дифференциальные векторные операции	18
3.3	Цилиндрическая и сферическая системы координат	20
3.4	Взаимный базис. Ко- и контравариантные составляющие векторов	22
3.5	Циклические координаты	24
3.6	УПРАЖНЕНИЯ к п. 3	24
4	ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ	25
4.1	Применение оператора $\vec{\nabla}$	25
4.2	Интегральные теоремы векторного анализа	27
4.3	Потенциальные, соленоидальные и Лапласовы векторные поля	29
4.4	УПРАЖНЕНИЯ к п. 4.	31

Список литературы

- [1] *Борисенко А.И., Тарапов И.В.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М., 1968. 252 с.
- [2] *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М., 1970. 712 с.
- [3] *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. М., 1970. 503 с.
- [4] *Будак В.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М., 1967. 608 с.

Составитель: профессор, д.ф.-м.н. Запрягаев Сергей Александрович