

## §1 Введение. История возникновения и развития электродинамики

В настоящее время в природе известны четыре типа фундаментальных взаимодействий - сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное. Сильное взаимодействие обеспечивает притяжение частиц, образующих ядра атомов (нуклонов). Электромагнитное взаимодействие обеспечивает притяжение или отталкивание частиц, обладающих специальным свойством - зарядом. Электромагнитное взаимодействие приблизительно на два порядка слабее сильного. Слабое взаимодействие, интенсивность которого приблизительно на 16 порядков слабее сильного, ответственно за распад "элементарных" частиц. Наконец, гравитационное взаимодействие, которое на 43-44 порядка слабее сильного, ответственно за притяжение частиц, обладающих массами.

Первым из четырех перечисленных было открыто гравитационное взаимодействие. Следующим было электромагнитное взаимодействие, которое определяет колоссальное количество явлений природы.

Электромагнитное взаимодействие характеризуется участием так называемого электромагнитного поля. Электромагнитное поле - особая форма материи, посредством которой осуществляется взаимодействие между заряженными частицами. Электродинамика - физическая теория определяющая свойства электромагнитного поля. Начиная с середины XX века, электродинамика делится на классическую и квантовую. Законы классической электродинамики сформулированы в середине XIX века в уравнениях Максвелла. Система уравнений Максвелла позволяет определить значения основных характеристик электромагнитного поля - вектор напряженности электрического поля **E** и вектор магнитной индукции поля **B** в зависимости от распределения в пространстве зарядов и токов. Как показали исследования электромагнитных взаимодействий, законы классической электродинамики оказались неприменимы для процессов, протекающих на малых пространственно - временных интервалах. В этом случае справедливы законы так называемой квантовой электродинамики.

Первые исследования электромагнитных явлений сформировали два независимых раздела, определяющих свойства электрических явлений (взаимодействие покоящихся зарядов) и магнитных явлений (взаимодействие постоянных токов). Последующие исследования показали, что электрические и магнитные явления взаимосвязаны и проявляются как частные случаи более общего так называемого электромагнитного поля.

В настоящем курсе рассматривается классическая электродинамика, которая хотя и имеет отмеченное выше ограничение, не утратила своего значения и является фундаментом большинства разделов электротехники, радиотехники, электроники (кроме квантовой), классической оптики и т.п. На основе уравнений классической электродинамики рассматриваются многие проблемы поведения плазмы в лабораторных условиях и в космосе, широкий круг прикладных и теоретических задач многих других разделов физики.

Проявления электрических и магнитных явлений известны с древних времен [5]. Так были найдены минералы, притягивающие железо. Было обнаружено, что янтарь (по гречески - электрон), потертый о шерсть, притягивает легкие предметы. Проявления природного электричества - разряды молний, шаровая молния, различные природные свечения привлекали своей загадочностью и силой. Исследования и наблюдения этих явлений осуществлялось веками, однако только в 1600 году Вильям Гильберт разграничил электрические и магнитные явления. Им было открыто существование магнитных полюсов, установлено, что земной шар является гигантским магнитом. В 17 -ом, начале 18 -го веков были построены первые электростатические машины, установлено существование зарядов двух типов, обнаружена электропроводность металлов. В 1745 году была изобретена лейденская банка, которая явилась первым конденсатором и дала возможность накапливать большие электрические заряды. В 1747 - 1753 годах Бенджамин Франклин сформулировал первую последовательную теорию электрических явлений, установил электрическую природу молнии и изобрел молниеотвод.

Во второй половине 18 века началось количественное изучение электрических явлений. Г.Кавендиш в 1773 и Шарль Огюст Кулон в 1785 установили закон взаимодействия неподвижных точечных зарядов.

Следующий этап в развитии электродинамики оказался связанным с открытием Луиджи Гальвани "животного электричества" в конце 18 века. Алесандр Вольт правильно истолковав опыты Гальвани изобрел в 1800 году первый источник электрического тока. В 1807 году Гемфри Дэви, пропустив ток через растворы

щелочей получил неизвестные ранее металлы - натрий и калий. В 1826 году Георг Симон Ом определил количественную зависимость электрического тока от напряжения в цепи. В 1830 году Карл Фридрих Гаусс сформулировал основную теорему электростатики. В 1841 году Джеймс Прескотт Джоуль установил, что количество теплоты, выделяемое в проводнике пропорционально квадрату силы тока.

Однако наиболее фундаментальное открытие было сделано Ганс Христиан Эрстедом в 1820 году, установившим связь между электрическими и магнитными явлениями. В том же году Андре-Мари Ампер нашел закон взаимодействия электрических токов. Открытия Эрстеда и Ампера положили начало развитию электродинамики как науки.

В 1830-1840 -х годах большой вклад в развитие электродинамики внес Майкл Фарадей - основатель общего учения об электромагнитных явлениях, в котором все электрические и магнитные явления рассматривались с единой точки зрения. В 1831 году Фарадей открыл закон электромагнитной индукции - возбуждение электрического тока в контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Это открытие положило начало электротехники. В 1833 -34 годах Фарадей установил законы электролиза, в 1837 году открыл явление поляризации диэлектриков, в 1845 году явления парамагнетизма и диамагнетизма, вращение плоскости поляризации света в магнитном поле. Фарадей предположил, что наблюдаемое взаимодействие электрических зарядов и токов осуществляется через создаваемые ими в пространстве электрическое и магнитное поля, введя таким образом сами эти поля как реальные физические объекты. Фарадей исходил из концепции близкого действия, отрицая распространенную в то время концепцию, согласно которой тела взаимодействуют друг с другом через пустоту. При этом Фарадей ввел понятие о силовых линиях как механических натяжениях в гипотетической среде - эфире.

В 1861 - 73 годах электродинамика получила свое развитие и завершение в работах Джеймса Клерка Максвелла. Максвелл сформулировал фундаментальные уравнения классической электродинамики, добавив к известным экспериментальным законам и соотношениям гипотезу о порождении магнитного поля переменным электрическим полем. По сути данная гипотеза не воспринималась научным сообществом почти тридцать лет. При этом вслед за Фарадеем, Максвелл рассматривал электромагнитные явления как особую форму механических процессов протекающих в эфире. Важнейшим следствием уравнений Максвелла являлось предсказание электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света. Экспериментально наличие таких волн было обнаружено Генрихом Герцем в 1886-89 годах. Это явилось окончательным подтверждением теории Максвелла.

Попытки применения законов классической электродинамики к исследованию электромагнитных процессов в движущихся средах привели к значительным противоречиям и проблемам. Стремясь разрешить их Альбертом Эйнштейном в 1905 году была сформулирована специальная теория относительности. Эта теория опровергла идею существования эфира, наделенного механическими свойствами. Стало очевидным, что законы электродинамики не могут быть сведены к законам классической механики. Таким образом понятие электромагнитного поля приобрело смысл специфической формы существования материи, обладающей всеми привычными механическими атрибутами (энергия, импульс, момент импульса), но не только ими. Конкретное исследование свойств электромагнитного поля, способы его создания и использования и являются предметом изучения электродинамики.

## **§2 Экспериментальные данные, лежащие в основе электродинамики. Электростатика.**

Электростатическое поле - частный случай электромагнитного поля. Для электростатического поля экспериментально установлено, что источником такого поля являются электрические заряды.

### **Заряд**

Электрический заряд - это свойство ряда материальных объектов, определяющее меру силового взаимодействия между носителями такого свойства. Носителями зарядов являются микроскопические объекты (частицы), из которых построены атомы, ядра и частицы, передающие взаимодействие. Условно их

можно назвать "элементарные частицы". Например: электрон, протон, мюон и т.п. Установлено, что:

1. *Заряд любого объекта кратен величине заряда электрона  $e$*

$$e = -4.803242 \times 10^{-10}. \quad = -1.6021892 \times 10^{-19}^1$$

Об этом свойстве говорят как о дискретности или квантовом характере величины заряда<sup>2</sup>.

2. *Существует два типа электрических зарядов.* Их условились называть "положительными" и "отрицательными" зарядами.

3. *Суммарный заряд замкнутой системы не меняется с течением времени.*

Данное наблюдение принято называть **законом сохранения заряда**.

Если система состоит из  $N$  заряженных объектов с зарядами  $q_k$ , то закон сохранения заряда означает, что

$$Q = \sum_{k=1}^N q_k = const. \quad (1)$$

Так как носителями зарядов являются элементарные частицы, "размеры" которых порядка  $\approx 10^{-12}$  см. и менее, во многих практически важных случаях можно считать, что заряды - точечные объекты. Однако, для математического описания свойств электромагнитного поля удобно использовать хорошо развитый аппарат дифференциального и интегрального исчисления, в рамках которого используются непрерывно меняющиеся величины. В связи с этим проводится обобщение понятия точечного заряда на случай его непрерывного распределения в пространстве.

### Объемная плотность заряда

В случае, когда заряд непрерывно распределен по объему вводится понятие **объемной плотности заряда** по определению:

$$\rho(\mathbf{r}) \equiv \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv} \quad (2)$$

Здесь  $\Delta Q$  - заряд внутри элемента объема  $\Delta v$ . Таким образом  $\rho$  является характеристикой точки пространства и в общем случае является функцией от координат.

Практически соотношение (2) используется в том смысле, что внутри бесконечно малого объема  $dv$ , расположенного в точке  $\mathbf{r}$ , заключен бесконечно малый заряд  $dQ = \rho(\mathbf{r}) dv$ . Суммарный заряд внутри конечного объема  $V$  на основании (2) равен

$$Q = \int_V dQ = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (3)$$

Например, вычислим полный заряд  $Q$  шара радиуса  $R$ , заряженного с объемной плотностью  $\rho = a r^2 \cos^2 \theta$  (где  $r, \theta$  - переменные сферической системы координат,  $a$  - размерная постоянная). На основании (3)  $Q$  равен:

$$Q = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a r^2 \cos^2 \theta r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = a \frac{r^5}{5} \Big|_0^R \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi 2\pi = \frac{4\pi}{15} a R^5.$$

Определение (2) включает и случай точечного заряда. Так для точечного заряда  $q$ , находящегося в точке, радиус-вектор которой  $\mathbf{r}_q$ , объемная плотность заряда в точке  $\mathbf{r}$  есть:

$$\rho(\mathbf{r}) = q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q), \quad (4)$$

где  $\delta(x)$  - дельта-функция Дирака. Справедливость выражения (4) вытекает из равенства (3).  $\delta(x)$  - функция от вектора  $\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$  в декартовой системе координат есть  $\delta(\mathbf{a}) \equiv \delta(a_x)\delta(a_y)\delta(a_z)$

<sup>1</sup> 1 кулон =  $3 \times 10^9$  ед. СГСЕ.

<sup>2</sup> Заряды кварков в данном курсе не обсуждаются.

Для системы  $N$  точечных зарядов объемная плотность заряда определяется выражением:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{q_k}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{r}_{q_k}$  - радиус-вектор расположения  $k$ -го точечного заряда в пространстве.

По определению, размерность плотности заряда  $[\rho]$  равна размерности заряда  $[q]$ , деленной на размерность объема  $[V] = [l]^3$ .

### Поверхностная плотность заряда

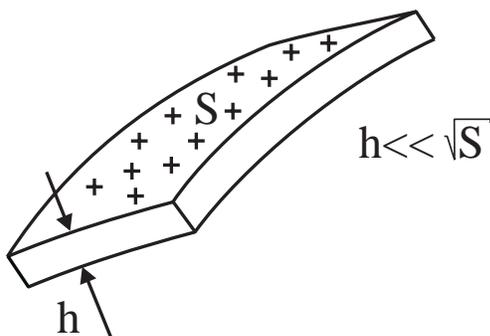


Рис. 1:

В ряде случаев можно говорить о распределении заряда по поверхности  $S$ , например, если толщина заряженной пластины много меньше корня квадратного от величины поверхности пластины (см. рис. 1). В этом случае удобно ввести понятие, которое будет характеризовать заряд единицы поверхности или **поверхностную плотность** заряда  $\sigma$

$$\sigma \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds}; \quad [\sigma] = \frac{[e]}{[S]}; \quad dQ = \sigma ds; \quad Q = \int_S \sigma ds. \quad (6)$$

Пусть, например, цилиндрическая поверхность радиуса  $R$  и высоты  $H$  заряжена с поверхностной плотностью  $\sigma = a z \sin \phi$  ( $\phi, z$  - переменные цилиндрической системы координат,  $a$  -размерная константа). В этом случае полный

заряд цилиндра равен:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^H a \sin \phi z R d\phi dz = 0.$$

### Линейная плотность заряда

Если длина заряженного объекта много больше характерного размера поперечного сечения (тонкая нить), то можно ввести понятие **линейной плотности** заряда  $\tau$  на линии  $L$ :

$$\tau \equiv \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}; \quad [\tau] = \frac{[e]}{[l]}; \quad dQ = \tau dl; \quad Q = \int_L \tau dl. \quad (7)$$

Если, например, отрезок прямой линии длины  $l$  заряжен с линейной плотностью  $\tau = \tau_0 x$ , то полный заряд линии равен:

$$Q = \int_0^l \tau_0 x dx = \tau_0 l/2.$$

### Электрический ток

В соответствии с законом сохранения заряда, единственной причиной приводящей к изменению суммарного заряда замкнутой системы является перемещение зарядов из или внутрь заданной системы. В свою очередь, движение зарядов - определяется как электрический ток.

**Сила тока**  $I$  определяется как величина заряда, прошедшего через поперечное сечение проводника за единицу времени:

$$I \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}; \quad [I] = \frac{[e]}{[t]} \quad (8)$$

### Плотность тока.

Сила тока является интегральной характеристикой для проводника. Соответствующей дифференциальной характеристикой является **плотность электрического тока  $\mathbf{j}$** , которая определяет количество заряда, прошедшее в единицу времени через единицу поверхности.

Для определения  $\mathbf{j}$  рассмотрим произвольную поверхность  $S$  и вычислим заряд, проходящий через  $S$  за бесконечно малый промежуток времени  $dt$ . Выделим на  $S$  элементарную поверхность  $ds$ . Если скорость движения зарядов  $\mathbf{v}$ , то за время  $dt$  площадку  $ds$  пересекут заряды, находящиеся внутри цилиндра, ось которого совпадает с направлением  $\mathbf{v}$ . Высота такого цилиндра равна  $v dt$ , а площадь основания  $ds' = ds \cdot \cos \alpha$ , где  $\alpha$  - угол между направлением нормали к  $ds$  и вектором скорости (рис. 2). Объем этого цилиндра равен  $dv = ds \cos \alpha v dt = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt ds$ . Здесь  $\mathbf{n}$  - вектор единичной нормали к  $ds$ . В силу бесконечной малости  $dv$ , с точностью до членов одного порядка, все заряды внутри  $dv$  имеют скорость  $\mathbf{v}$ . На основании (3) элементарный заряд прошедший через  $ds$  за время  $dt$  равен:  $\rho dv = \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt ds$ , где  $\rho$  - объемная плотность заряда в точке расположения  $dv$ . Следовательно элементарный заряд, прошедший за время  $dt$  через всю площадку  $S$  есть:

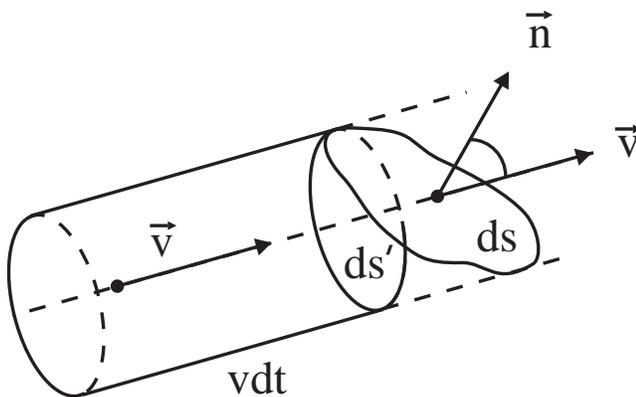


Рис. 2:

$$dQ = \int_S \rho (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dt ds = dt \int_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (9)$$

В равенстве (9) введено определение вектора  $\mathbf{j}$ :

$$\mathbf{j} \equiv \rho \mathbf{v}; \quad [j] = \frac{[e]}{2}. \quad (10)$$

Таким образом, в соответствии с (8) получим для силы тока:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) ds. \quad (11)$$

Как следует из (11) вектор  $\mathbf{j}$  имеет физический смысл заряда, прошедшего в единицу времени через единичное поперечное сечение проводника и называется плотностью электрического тока.

### Линейный проводник.

В случае, когда поперечное сечение проводника мало, можно условно использовать понятие линейного проводника. При этом предельный переход к линейному проводнику позволяет написать следующее формальное соотношение:

$$\mathbf{j} dv = j \mathbf{k} dv = j \mathbf{k} ds dl = j ds \mathbf{k} dl \Rightarrow I dl, \quad (12)$$

где  $dl$  - бесконечно малый элемент длины проводника,  $\mathbf{k}$  - единичный вектор в направлении тока, то есть вектор касательной к линии тока,  $d\mathbf{l} \equiv \mathbf{k} dl$ .

### Дифференциальная форма закона сохранения заряда.

Используя понятие плотности тока, перепишем закон сохранения заряда в форме

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \oint_S (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (13)$$

Данное равенство устанавливает, что единственной причиной изменения полного заряда системы  $Q$  является "выход" или "вход" заряда в систему за счет их движения. В равенстве (13) учтено, что если заряд выходит

из замкнутой системы, ограниченной поверхностью  $S$ , то  $\mathbf{j}$  направлен в сторону единичного внешнего вектора нормали  $\mathbf{n}$  к замкнутой поверхности  $S$ , угол между этими векторами меньше  $\pi$  и скалярное произведение  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$  положительно. Наоборот, если заряд входит в систему, то эти векторы направлены в противоположные стороны, угол между ними больше  $\pi$  и скалярное произведение отрицательно. Таким образом равенство (13) одинаково в обоих случаях.

С учетом определения плотности заряда и теоремы Остроградского - Гаусса равенство (13) можно переписать в виде:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \right\} dv = 0.$$

В силу произвольности объема интегрирования из данного равенства вытекает выражение, которое носит название *закона сохранения заряда в дифференциальной форме*.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (14)$$

### Закон Кулона.

Важным экспериментальным результатом, полученным при исследовании взаимодействия заряженных тел, является закон Кулона. **Закон Кулона** устанавливает, что два точечных заряда  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся в точках радиус - векторы которых  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , соответственно, взаимодействуют друг с другом с силой, которая получила название кулоновской силы. При этом сила, которая действует на второй заряд со стороны первого равна:

$$\mathbf{F}_{21} = k_1 \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (15)$$

Здесь  $k_1$  - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц измерения физических величин, входящих в (15). Если система координат выбрана так, что начало отсчета совпадает с зарядом  $q_1$ , то

$$\mathbf{F}_{21} = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (16)$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус - вектор второго заряда. Как видно из представленных выражений одноименные заряды притягиваются, а разноименные - отталкиваются. Кроме того сила взаимодействия зарядов убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между зарядами.

### Напряженность поля.

Вместо силы, действующей на заряд, удобно ввести понятие **напряженности поля**. Представим выражение (16) в виде  $\mathbf{F}_{21} = q_2 \mathbf{E}_1$ . Здесь  $\mathbf{E}_1$  - вектор, который определяет силу действующую на единичный заряд со стороны заряда  $q_1$  в точке, где находится второй заряд. Этот вектор и называется напряженностью электрического поля в точке. Таким образом, если начало координат находится в точке расположения заряда  $q$ , то напряженность электрического поля, создаваемого этим зарядом в точке с радиус- вектором  $\mathbf{r}$  равна:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_1 \frac{q}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (17)$$

### Принцип суперпозиции.

Экспериментально установлено, что напряженность поля удовлетворяет **принципу суперпозиции**: для системы зарядов напряженность электрического

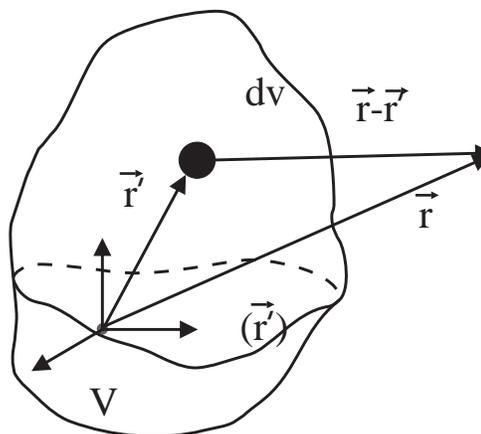


Рис. 3:

поля в произвольной точке равна векторной сумме напряженностей полей создаваемых каждым зарядом. Так,  $N$  штук зарядов  $q_k$  в точках  $\mathbf{r}_k$ , создают суммарную напряженность поля в  $\mathbf{r}$ , равную:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k(\mathbf{r}) = k_1 \sum_{k=1}^N q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}. \quad (18)$$

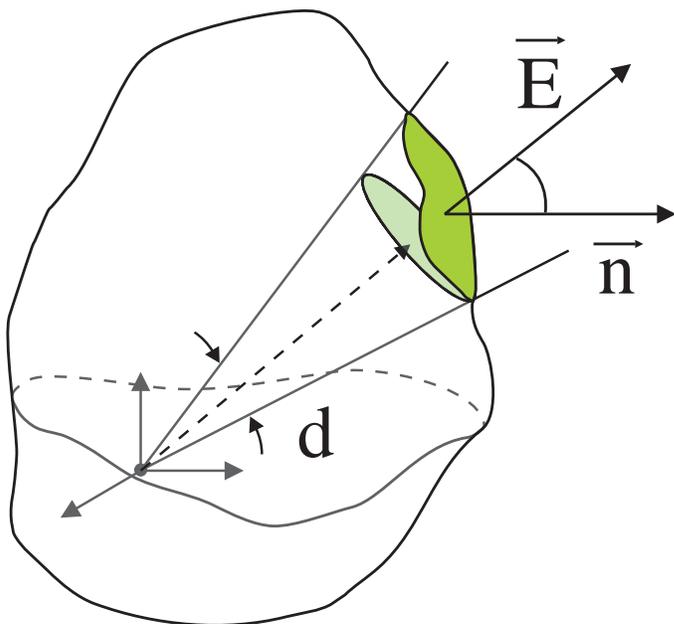


Рис. 4:

Если заряд распределен непрерывно по объему  $V$  с плотностью  $\rho$ , то напряженность поля, создаваемая в произвольной точке пространства  $\mathbf{r}$ , бесконечно малым зарядом  $\rho(\mathbf{r}') dv'$ , находящимся в объеме  $dv'$  в соответствие с (17) равна (см. рис. 3):

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_1 dq \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = k_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (19)$$

В соответствии с принципом суперпозиции поле всей системы зарядов внутри объема  $V$  равно:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V d\mathbf{E} = k_1 \int_V \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \rho(\mathbf{r}') dv' \quad (20)$$

Если поле создается заряженной плоскостью, то в (20) необходимо заменить интеграл по объему интегралом по заряженной поверхности и кроме того  $\rho dv' \rightarrow \sigma dS$ . Если поле создается заряженной линией, то интеграл в (20)

заменяется на интеграл по заряженной линии и  $\rho dv' \rightarrow \tau dl$ .

### Теорема Гаусса.

Следствием закона Кулона и принципа суперпозиции является **теорема Гаусса** в электростатике. Для доказательства данной теоремы рассмотрим точечный заряд  $q$ , расположенный в начале координат (см. рис. 4). Окружим данный заряд произвольной поверхностью  $S$ . Выделим на этой поверхности бесконечно малую поверхность  $ds$  и рассмотрим скалярное произведение  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) ds$ , где  $\mathbf{n}$  - нормаль к  $ds$ :

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) ds = k_1 \frac{q}{r^2} \cos \alpha ds = k_1 \frac{q}{r^2} ds'.$$

Зная  $\alpha$  - угол между направлением вектора  $\mathbf{E}$  и вектора нормали  $\mathbf{n}$ . По определению элемент телесного угла  $d\Omega = ds \cos \alpha / r^2$ . В результате для рассматриваемого скалярного произведения имеем:  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = k_1 q d\Omega$ . Интегрируя данное выражение по замкнутой поверхности находим поток вектора напряженности электрического поля  $\Phi$  через замкнутую поверхность  $S$ :

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = k_1 q \oint d\Omega = k_1 q 4\pi.$$

С учетом принципа суперпозиции, для системы  $N$  штук зарядов  $\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \mathbf{E}_k$ , где  $\mathbf{E}_k$  - напряженность поля, создаваемая  $k$  ым зарядом. В результате, если поверхность  $S$  охватывает все заряды получим равенство:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^N \oint_S \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{s} = 4\pi k_1 \sum_{k=1}^N q_k = 4\pi k_1 Q. \quad (21)$$

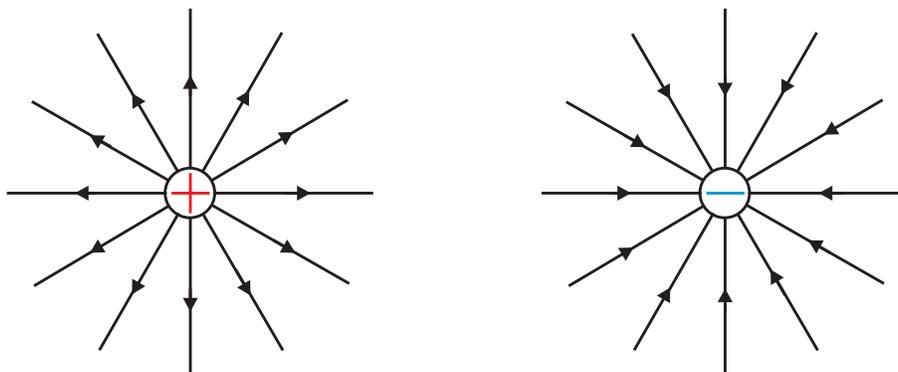


Рис. 5: Силовые линии поля положительного и отрицательного точечных зарядов.

Здесь  $Q$  - полный заряд системы. Используя теорему Остроградского - Гаусса и выражение (3) перепишем (21) в виде:

$$\int_V [\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi k_1 \rho] dv = 0.$$

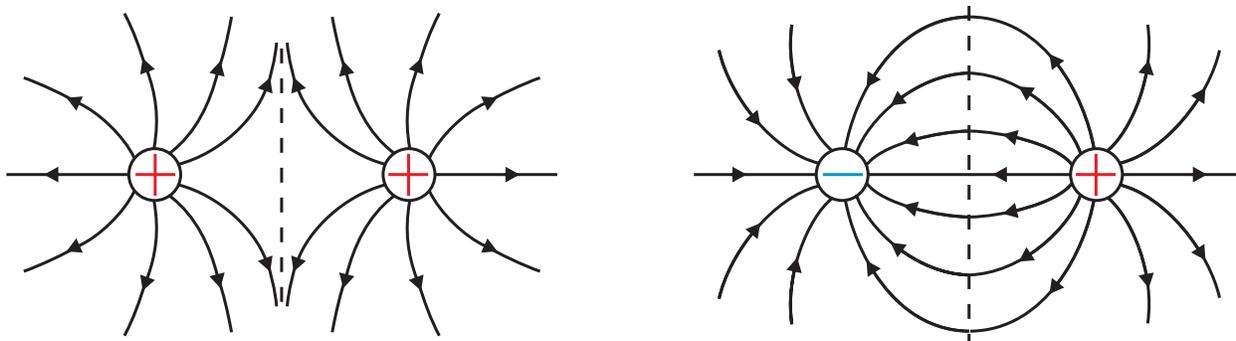


Рис. 6: Силовые линии поля системы двух одноименных и разноименных.

В силу произвольности объема интегрирования из данного интегрального равенства следует теорема Гаусса в электростатике в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho \quad (22)$$

#### Силовые линии.

Для геометрического представления электростатического поля вводится понятие силовых линий. **Силовой линией поля** называется кривая, вектор касательной к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора напряженности поля. Так как направление поля определяется знаком заряда, направление касательной на силовой линии указывается явно стрелочкой. На рисунках 5,6 приведены примеры силовых линий. Как видно из рисунков, силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах.

### §3 Экспериментальные данные, лежащие в основе электродинамики. Магнитостатика.

Экспериментально установлено, что движение зарядов или ток приводит к появлению в пространстве силового поля, которое получило название магнитного поля. Значение магнитного поля в вакууме задается

вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , который определяет величину и направление силового воздействия на движущийся заряд или ток. Для магнитного поля установлены следующие основные законы:

- 1) закон отсутствия магнитных зарядов;
- 2) закон Био–Саввара–Лапласа;
- 3) принцип суперпозиции вектора индукции;
- 4) закон Ампера.

Исторически эти законы были открыты в экспериментах, в которых магнитное поле не являлось функцией времени.

#### **Закон отсутствия магнитных зарядов.**

Данный закон означает, что силовые линии вектора индукции магнитного поля замкнуты и не имеют источников или стоков. Другими словами, поток вектора индукции магнитного поля через замкнутую поверхность  $S$  равен нулю и с учетом теоремы Остроградского - Гаусса имеет место равенство:

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 = \int_V \operatorname{div} \mathbf{B} dv \quad (23)$$

Здесь  $S$ -поверхность, ограничивающая объем  $V$ . В силу произвольности объема интегрирования  $V$  дифференциальная форма закона отсутствия магнитных зарядов имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (24)$$

Несмотря на экспериментальное утверждение об отсутствии магнитных зарядов в теории электромагнитного поля существование таких зарядов не запрещено. Более того, если бы магнитные заряды существовали, это было бы естественным объяснением квантования электрических зарядов. Тем не менее, магнитные заряды ни положительные, ни отрицательные, никогда не наблюдались. Магнит всегда имеет два равных по величине полюса и магнитное поле вокруг него есть результирующее поле обоих полюсов. Гипотеза о существовании в природе магнитных зарядов была высказана П.Дираком в 1931 году. Эти заряды получили название монополи Дирака - частицы обладающие "положительным" или "отрицательным" магнитным зарядом. Предпринимались тщательные попытки поиска таких зарядов, но до сих пор монополи не обнаружены. До настоящего времени остается открытым вопрос, связано это с тем, что монополи рождаются очень редко, или же они не существуют в принципе. В связи с этим в классической электродинамике принято считать, что постоянное магнитное поле не имеет источников и причиной его возникновения являются электрические токи.

#### **Закон Био–Саввара –Лапласа.**

Величина и направление магнитного поля вызванного постоянным электрическим током определяется экспериментально установленным законом, который называется **законом Био-Саввара- Лапласа**. Данный закон сформулированный для бесконечно малого элемента с током означает следующее: элементарная индукция  $d\mathbf{B}$  создаваемая элементарным участком линейного тока  $d\mathbf{l}$  (с силой тока  $I$ ) на расстоянии  $\mathbf{r}$  от  $d\mathbf{l}$  равна:(см. рис. 7)

$$d\mathbf{B} = \gamma I \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{r}]}{r^3}; \quad dB = \gamma I \frac{dl}{r^2} \sin\varphi; \quad (25)$$

здесь  $d\mathbf{l} = \vec{\tau} dl$ ,  $\vec{\tau}$ -единичный вектор касательной к линии тока в точке нахождения отрезка  $dl$ , направленный по направлению тока,  $\gamma$  -коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения физических величин, входящих в (25)

#### **Принцип суперпозиции.**

Также, как и для электрического поля, для магнитного поля принцип суперпозиции означает, что *индукция, создаваемая линейным током конечных размеров  $L$  равна векторной сумме индукций, создаваемых элементарными участками тока в данной точке пространства:*

$$\mathbf{B} = \int_L d\mathbf{B}. \quad (26)$$

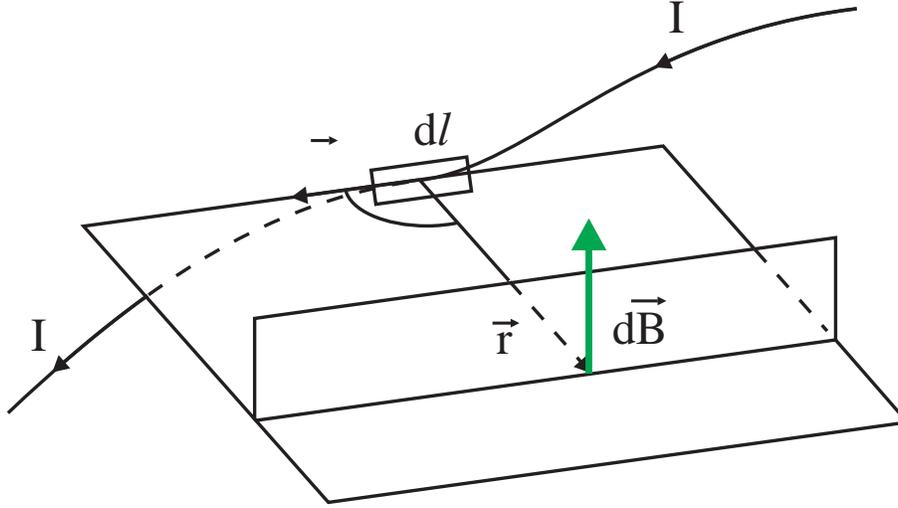


Рис. 7:

Рассмотрим пример вычисления  $\mathbf{B}$  в соответствии с (25), (26). Пусть имеется бесконечный прямолинейный ток силы  $I$ . Выберем декартову систему координат так, чтобы линия тока совпадала с осью  $z$ . Определим индукцию, создаваемую таким током в пространстве (см. рис. 8). Найдем элементарную индукцию  $d\mathbf{B}$  от элементарного участка тока  $d\mathbf{l}' = \mathbf{k}dz$ , лежащего на оси  $Z$  на расстоянии  $z$  от начала координат. Найдем  $\mathbf{B}$  в произвольной точке  $C$ , лежащей на оси  $y$  ( $OC = y$ ). Из рисунка 8 видно, что  $\mathbf{R} = y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ . В соответствии с (25), элементарная индукция в данной точке равна:

$$d\mathbf{B} = \frac{\gamma I}{R^3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & dz \\ 0 & y & -z \end{vmatrix} = -\frac{\gamma I}{R^3} y dz \mathbf{i}. \quad (27)$$

Как следует из (27), вектор элементарной индукции от любого элементарного участка тока направлен против положительного направления оси  $x$  (см. рис. 8). Здесь  $R = |\mathbf{R}| = \sqrt{z^2 + y^2}$ . Таким образом, с учетом принципа суперпозиции (26), величина индукции в точке  $C$  равна:

$$B = \int dB = 2 \int_0^{\infty} \frac{\gamma I}{(z^2 + y^2)^{3/2}} y dz = 2\gamma I y \int_0^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Выполняя замену переменной интегрирования  $z = y \operatorname{tg} t$ ;  $dz = y dt / \cos^2 t$  получим:

$$B = 2\gamma I y \int_0^{\pi/2} \frac{y dt}{\cos^2 t} \left( \frac{\cos^2 t}{y^2} \right)^{3/2} = \frac{2\gamma I}{y} \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \frac{2\gamma I}{y}. \quad (28)$$

Учитывая цилиндрическую симметрию системы, ясно, что величина вектора индукции (28) одинакова для всех точек окружности радиуса  $y$ , а вектор индукции  $\mathbf{B}$  направлен по касательной к окружности (см. рис. 8). Окончательно результат для вектора индукции в векторном виде в точке  $C$  есть:

$$\mathbf{B} = -\frac{2\gamma I}{y} \mathbf{i}. \quad (29)$$

Вычислим теперь циркуляцию вектора  $\mathbf{B}$  бесконечного тока вдоль окружности радиуса  $y$ . Учитывая, что величина  $B$  на окружности  $y$  постоянна, находим

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi y = \frac{2\gamma I}{y} 2\pi y = 4\pi\gamma I.$$

Как видно полученный результат не зависит от радиуса окружности. Можно показать, что циркуляция вектора индукции вообще не зависит от формы замкнутого контура. Данное утверждение следует из

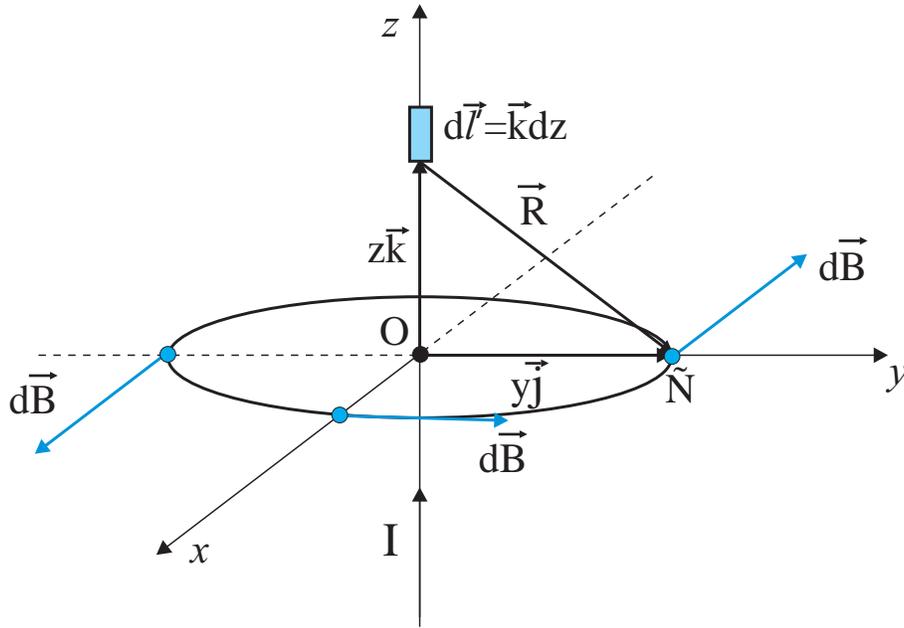


Рис. 8:

полученного результата для циркуляции поля по окружности. Действительно, если произвольный контур представить в виде совокупности бесконечно малых отрезков окружностей различных радиусов и радиальных отрезков, соединяющих отрезки окружностей, то в силу равенства нулю циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  по радиальным отрезкам получим доказательство сделанного утверждения. Таким образом:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l},$$

где  $L$  - произвольный контур, охватывающий ток  $I$ . В результате получаем закон, который был установлен экспериментально Ампером:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi\gamma I. \quad (30)$$

На основании приведенных выше рассуждений ясно, что экспериментальный закон (30) является следствием законов Био-Савварра-Лапласа и принципа суперпозиции.

Если использовать теорему Стокса и формулу (11) получим:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi\gamma \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}, \quad d\mathbf{s} = \mathbf{n} ds, \quad (31)$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор нормали к поверхности  $S$ , для которой контур  $L$  является границей. В силу произвольности поверхности интегрирования получаем дифференциальную форму соотношения (30):

$$\text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\gamma \mathbf{j}. \quad (32)$$

### Закон Ампера.

Данный закон устанавливает, что на элементарный участок тока  $d\mathbf{l}$  (с силой тока  $I$ ) со стороны внешнего магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B}$ , действует элементарная сила равная:

$$d\mathbf{F} = \lambda I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}], \quad (33)$$

где  $\lambda$ -коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения физических величин, входящих в (33)

Продemonстрируем применение закона (33) на простом примере. Вычислим силу взаимодействия двух параллельных, бесконечных, прямолинейных токов  $I$  и  $I'$ , находящихся на расстоянии  $d$  друг от друга (рис. §3).

На основании (29) в точке расположения бесконечно малого отрезка с током  $d\mathbf{l}$ , током  $I'$  создается индукция равная

$$\mathbf{B} = -\frac{2\gamma I'}{d} \mathbf{i}.$$

Следовательно, по закону Ампера (33) на бесконечно малый участок тока  $d\mathbf{l} = \mathbf{k}dz$  действует бесконечно малая сила  $d\mathbf{F}$ :

$$d\mathbf{F} = \lambda I [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = \lambda I \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & dz \\ -2\gamma I'/d & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2\gamma\lambda \frac{II'}{d} dz \mathbf{j}. \quad (34)$$

Таким образом, в соответствии с (34), на единицу длины проводника действует сила, равная по величине:

$$\frac{dF}{dz} = 2\gamma\lambda \frac{II'}{d} \quad (35)$$

При этом, как следует из (34), если токи направлены в одну сторону, то проводники притягиваются. Если токи направлены противоположно, то проводники отталкиваются.

#### Сила Лоренца.

На основании (33) можно получить силу, действующую на точечную частицу в магнитном поле, из следующих рассуждений: так как  $I d\mathbf{l} \rightarrow \mathbf{j} dv$  (12) и, кроме того, для точечного заряда плотность тока  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{v}$ , то сила, действующая на движущийся заряд, равна:

$$\mathbf{F} = \int d\mathbf{F} = \int \lambda [\mathbf{j} dv \times \mathbf{B}] = \lambda e [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (36)$$

Последнее выражение называется силой **Лоренца** в магнитном поле.

## §4 Закон электромагнитной индукции Фарадея.

Рассмотренные выше законы для электрического и магнитного полей были получены в стационарных, не зависящих от времени случаях. Фарадеем для нестационарных полей был установлен закон, получивший название закон электромагнитной индукции. Суть этого закона состоит в следующем: *изменение потока вектора магнитной индукции через замкнутый контур приводит к возникновению в этом контуре электродвижущей силы.*

#### Поток вектора индукции.

По определению, поток  $\Phi$  вектора индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  через произвольную поверхность  $S$  равен:

$$\Phi = \int_S (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) ds \equiv \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}), \quad (37)$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор нормали к поверхности  $S$ .

#### Электродвижущая сила.

В электродинамике электродвижущей силой  $\varepsilon$  называется работа по перемещению единичного заряда вдоль замкнутого контура:

$$\varepsilon \equiv \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (38)$$

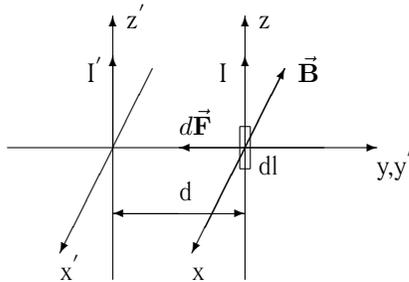


Рис. 9: Взаимодействие токов

Здесь  $\mathbf{E}$  - значение напряженности электрического поля на элементе контура  $d\mathbf{l}$  в системе координат в которой  $d\mathbf{l}$  **покоится** !  $d\mathbf{l} = \vec{\tau} dl$ ,  $\vec{\tau}$  - единичный вектор касательный к линии контура в точке расположения бесконечно малого элемента контура, направленный так, что при обходе контура площадь, ограниченная контуром остается слева.

### Закон Фарадея.

В результате, если контур  $L$  является границей поверхности  $S$  закон электромагнитной индукции можно записать в виде:

$$\varepsilon = -k_3 \frac{d\Phi}{dt} \quad (39)$$

здесь  $k_3$  -коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения величин входящих в (39), а знак минус соответствует закону Ленца, устанавливающему, что индуцированный в контуре ток (и образуемый этим током поток вектора индукции) имеет направление, препятствующее изменению потока вектора индукции в контуре. Соотношение (39) с учетом определений (38) и (37) имеет вид:

$$\oint_L (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = -k_3 \frac{d}{dt} \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}) \quad (40)$$

В законе электромагнитной индукции Фарадея существенно следующее:

1. закон получен для переменных полей;
2. в законе безразлично является ли причиной изменения  $\Phi$  перемещение контура в неоднородном магнитном поле  $\mathbf{B}$  или изменение  $\Phi$  связано с изменением  $\mathbf{B}$  во времени для неподвижного контура. Это означает, что в произвольном случае необходимо знать как связаны значения полей в покоящейся и движущейся системах координат (так как  $\varepsilon$  определена для значения  $\mathbf{E}$  в системе координат, в которой контур покоится). Из общих принципов, рассмотренных выше, связь напряженностей полей в разных системах координат не очевидна и в настоящем изложении будет рассмотрена в специальной теории относительности (гл. ??)

3. закон Фарадея экспериментально установил неразрывную связь напряженности электрического поля и индукции магнитного поля, что позволило говорить о едином электромагнитном поле, а наблюдения Фарадея привели к открытию связи электрического и магнитного полей. В области, где меняется магнитное поле генерируется вихревое электрическое поле;

4. часть электродвижущей силы, возникающая за счет поля  $\mathbf{E}$ , не связана с существованием физической проволоки. Поле  $\mathbf{E}$  может существовать в пустом пространстве и контурный интеграл от него по любой воображаемой линии в пространстве есть скорость изменения потока  $\mathbf{B}$  через поверхность, ограниченную этой линией. Это поле совсем не похоже на поле  $\mathbf{E}$ , создаваемое статическими зарядами, так как в электростатике контурный интеграл от  $\mathbf{E}$  по замкнутому контуру равен нулю;

5. Требуется соблюдать особую осторожность с движущимися контурами [6]. На рис. 10 а представлен случай, когда  $\Phi = const$ , но электродвижущая сила не равна нулю. Система представляет из себя вращающийся проводящий диск, находящийся в постоянном магнитном поле. А во втором случае - рис. 10 б  $\Phi$  меняется, но электродвижущая сила равна нулю. В этой системе два подвижных кулачка, находящиеся в постоянном магнитном поле, имеют разные точки соприкосновения в разные моменты времени их движения, что меняет величину площади контура, а следовательно, величину потока  $\Phi$ . Подробнее см. в [6]

Если ограничиться случаем, когда контур покоится, выражение (40) или (39) примет вид:

$$\varepsilon = -k_3 \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \oint_L (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}) = -k_3 \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}) \quad (41)$$

Произвольный случай рассматривается в электродинамике движущихся сред.

Используя теорему Стокса выражение (41) можно переписать в виде дифференциального равенства, которое называется дифференциальной формой закона электромагнитной индукции:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (42)$$

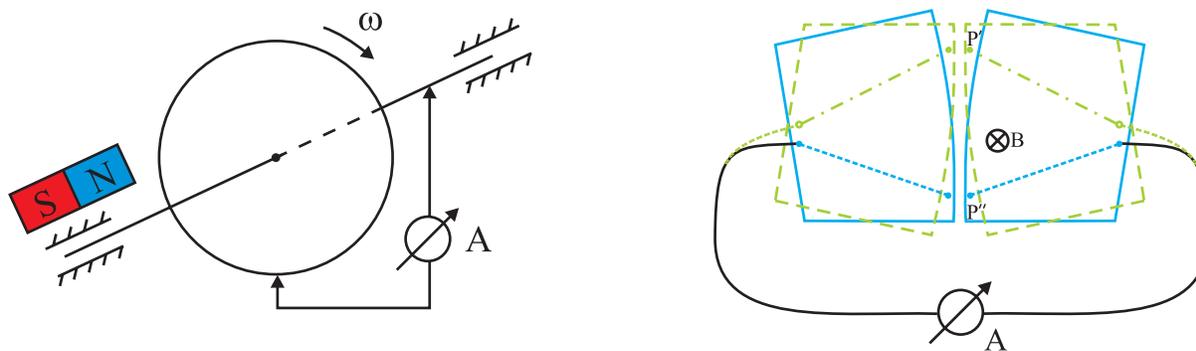
а. Поток не меняется, а  $\epsilon$  не равно 0б. Поток меняется, а  $\epsilon$  равно 0

Рис. 10: Нетривиальные примеры.

## §5 Ток смещения. Система уравнений Максвелла.

Первоначально рассмотренные в §2-§3 законы для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , определяющие электрические и магнитные взаимодействия, рассматривались как достаточные для описания свойств электромагнитного поля. Однако детальное их изучение показывает, что они несовместны. Для доказательства рассмотрим дифференциальную форму экспериментально установленных законов

Закон Кулона и принцип суперпозиции:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho \quad (43)$$

Закон отсутствия магнитных зарядов:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (44)$$

Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (45)$$

Закон Ампера:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \gamma \mathbf{j} \quad (46)$$

Закон сохранения заряда:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (47)$$

Вычислим, например,  $\operatorname{div}$  от левой и правой частей уравнения (46). В результате  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \gamma \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ , так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю. Таким образом, уравнение (46) противоречит закону сохранения заряда и необходимо отказаться либо от (46) либо от (47). Максвелл предположил, что выражение (46) справедливо лишь в случае постоянного поля, а для переменных полей данное уравнение должно быть обобщено введением дополнительного слагаемого, обеспечивающего выполнение закона сохранения заряда. Представленное в интегральном виде данное слагаемое было названо Максвеллом током смещения. В результате, в соответствии с гипотезой Максвелла уравнение (46) необходимо записать в виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi \gamma (\mathbf{j} + \mathbf{j}^x) = 4\pi \gamma \mathbf{j} + 4\pi \gamma \mathbf{j}^x, \quad (48)$$

где  $\mathbf{j}^x$  дополнительное слагаемое, получившее по историческим причинам название - плотность тока смещения.

В соответствии с гипотезой Максвелла остальные уравнения (43) - (44) и (47) остаются справедливыми и в случае переменных полей.

Для того, чтобы установить явный вид  $\mathbf{j}^x$  вычислим дивергенцию от выражения (48):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} = 0 = 4\pi\gamma \operatorname{div} \mathbf{j} + 4\pi\gamma \operatorname{div} \mathbf{j}^x.$$

Учитывая (47) и (43) для  $\operatorname{div} \mathbf{j}^x$  находим:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}^x = -\operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi k_1} \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Таким образом для плотности тока смещения  $\mathbf{j}^x$  получим:

$$\mathbf{j}^x = \frac{1}{4\pi k_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad (49)$$

где  $\mathbf{a}$  - произвольный вектор.

Следующее предположение, которое было сделано Максвеллом, состояло в том, что вектор  $\mathbf{a}$  был выбран равным нулю.

В результате система уравнений, для расчета произвольного электромагнитного поля создаваемого системой зарядов с плотностью  $\rho$  и системой токов с плотностью  $\mathbf{j}$  будет иметь вид:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = 4\pi\gamma \mathbf{j} + \frac{\gamma}{k_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases}. \quad (50)$$

Эта система уравнений и получила название системы уравнений Максвелла.

Запись уравнений в форме (50) была установлена не Максвеллом, а Гауссом почти через тридцать лет. Однако идея модификации закона Ампера путем добавления тока смещения принадлежит Максвеллу (1862 г.), который ввел это слагаемое в интегральные уравнения. Дальнейшее использование этой системы в практических расчетах подтвердило справедливость гипотезы Максвелла и в настоящее время система уравнений (50) является исходной для описания электромагнитных полей создаваемых зарядами и токами в вакууме.

Стандартной задачей электродинамики является задача определения электромагнитного поля при известных значениях  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ . Следовательно необходимо найти шесть неизвестных скалярных функций (по три проекции векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ). В системе уравнений (50) представлено девять скалярных уравнений. Если учесть, что плотность заряда и плотность тока предполагаются заданными, то закон сохранения заряда - это условие задачи. Таким образом остается восемь уравнений. Однако в силу того, что  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  входят в разные уравнения (в закон Кулона и в обобщенный закон Ампера), эти уравнения не независимы. Следовательно независимых остается 7 скалярных уравнений. Кроме того, закон электромагнитной индукции Фарадея и закон отсутствия магнитных зарядов имеют одинаковые дифференциальные следствия. В этом можно убедиться если вычислить дивергенцию от закона электромагнитной индукции Фарадея. Получим в этом случае  $\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{const}$ . Данное соотношение не является выводом закона отсутствия магнитных зарядов из закона Фарадея, так как величина константы из закона Фарадея не устанавливается. Закон отсутствия магнитных зарядов устанавливает, что эта константа равна нулю. Но, одновременно, это означает, что имеется еще одна дополнительная связь в уравнениях и, следовательно, независимых уравнений в системе уравнений Максвелла шесть. Таким образом число независимых уравнений совпадает с числом неизвестных функций и система имеет однозначное решение. Качественные рассуждения, представленные выше не являются строгим доказательством однозначности решений системы уравнений Максвелла. В общем случае однозначность доказана строгими математическими методами, которые здесь не приводятся.

Отметим в заключении что система уравнений Максвелла (50) в интегральном виде имеет вид:

$$\begin{cases} \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi k_1 \int_V \rho dv = 4\pi k_1 Q \\ \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \\ \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -k_3 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 4\pi\gamma \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} + \frac{\gamma}{k_1} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \\ \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv \end{cases} \quad (51)$$

## §6 Системы единиц измерения.

В предыдущем изложении при рассмотрении основных законов электродинамики были использованы коэффициенты пропорциональности  $k_1, \gamma, \lambda, k_3$ , которые должны выбираться в зависимости от использования системы единиц для физических величин, входящих в соответствующие законы. На основании системы уравнений Максвелла данные коэффициенты не независимы и между ними существуют связи, которые должны быть учтены в любой системе единиц.

Исторически электродинамика появилась как наука, объединившая исследования в области электростатики и магнитостатики, долгое время считавшиеся самостоятельными науками. И только после утверждения системы уравнений Максвелла стало ясно, что электрическое и магнитное поле — это частные случаи более общего понятия — электромагнитного поля. Однако до объединения полей, как в электростатике, так и в магнитостатике накопилось значительное число исследований по измерению характеристик полей в которых использовались единицы измерения, логически вытекающие из основных законов электростатики и магнитостатики, соответственно. Это привело к тому, что многие родственные понятия оказались определенными с использованием различных базисных единиц. В результате, в электродинамике, объединяющей электрические и магнитные поля, возникло несколько систем единиц измерения и единодушного признания той или иной системы не существует. Так как система единиц должна быть удобной и ясной, что содержит элемент субъективности, а область применения электродинамики разнообразна, это приводит к необходимости рассмотрения нескольких единиц измерения сложившихся под влиянием исторического процесса развития общей теории электромагнитного поля.

Определяющими формулами из которых можно получить размерности соответствующих величин в электростатике являются следующие соотношения [7]:

$$F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad E = k_1 \frac{q}{r^2}.$$

Соответственно для магнитостатического поля, можно использовать выражения [7]:

$$\frac{dF}{dz} = 2\gamma \lambda \frac{II'}{d} \quad B = \frac{2\gamma I}{d}$$

В силу закона Фарадея размерности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  связаны между собой, так как

$$\text{rot}\mathbf{E} + k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (52)$$

В соответствии с определением силы Кулона и силы, приходящейся на единицу длины проводника при взаимодействии двух токов, их отношение есть величина размерность которой совпадает с размерностью длины  $[l]$

$$\left[ \frac{F}{dF} \right] = [l]. \quad (53)$$

Подставляя в (53) размерности сил и используя для краткости обозначение  $k_2 = \gamma \lambda$  находим

$$\left[ \frac{F}{dF} \right] = k_1 \frac{[q]^2}{[l]^2} \cdot \frac{1}{k_2 \frac{[I]^2}{[l]}} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{[t]^2}{[l]} = [l] \quad (54)$$

Таким образом, отношение коэффициентов  $k_1/k_2 = [l]^2/[t]^2$  по размерности совпадает с размерностью квадрата скорости. Обозначим эту скорость через  $c$ , т.е.:

$$k_1/k_2 = c^2. \quad (55)$$

Составим теперь отношение размерностей напряженности электрического поля и индукции магнитного поля

$$\frac{[E]}{[B]} = k_1 \frac{[q]}{[l]^2} \cdot \frac{1}{\gamma \frac{[I]}{[l]}} = \frac{k_1}{\gamma} \cdot \frac{[t]}{[l]}.$$

Так как  $\gamma = k_2/\lambda$  то:

$$\frac{[E]}{[B]} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \lambda \cdot \frac{[t]}{[l]} = \lambda \cdot \frac{[l]}{[t]}. \quad (56)$$

Учитывая, что размерность  $[\text{rot } \mathbf{E}] \equiv [E]/[l]$  получим на основании (52):

$$\frac{[E]}{[l]} = k_3 \frac{[B]}{[t]}, \quad \frac{[E]}{[B]} = k_3 \frac{[l]}{[t]}. \quad (57)$$

Сравнивая (56) и (57) с учетом (55), находим, что:

$$k_3 \equiv \lambda; \quad \gamma = \frac{k_2}{k_3}. \quad (58)$$

Если в системе уравнений Максвелла (50) выбрать  $\rho = 0$  и  $\mathbf{j} = 0$ , то обобщенный закон Ампера в дифференциальной форме с учетом (58) имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{k_2}{k_1 k_3} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (59)$$

Вычислим ротор от последнего выражения, т.к.

$$\text{rot rot } \mathbf{B} \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$$

с учетом закона отсутствия магнитных зарядов и закона электромагнитной индукции Фарадея из (59) находим:

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{k_1/k_2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (60)$$

Аналогично вычислив ротор от закона электромагнитной индукции Фарадея найдем:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{k_1/k_2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (61)$$

Уравнения (60), (61) являются волновыми уравнениями д'Аламбера решения которого определяют волну распространяющуюся со скоростью  $c = \sqrt{k_1/k_2}$  (см. (55)). Экспериментально установлено, что скорость распространения электромагнитного поля равна  $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/сек.

Таким образом выбор коэффициентов  $k_i$  ( $i \in 1, 2, 3$ ) должен удовлетворять установленным выше связям. В результате, в разных системах единиц измерения, возникших исторически, значения коэффициентов пропорциональности в экспериментально установленных законах таковы [7]:

Система	$k_1$	$k_2 = \gamma\lambda$	$k_3 = \lambda$	$\gamma = k_2/k_3$	$\gamma/k_1$
СГСЭ	1	$c^{-2}$	1	$c^{-2}$	$c^{-2}$
СГСМ	$c^2$	1	1	1	$c^{-2}$
Гаусс	1	$c^{-2}$	$c^{-1}$	$c^{-1}$	$c^{-1}$
Хевисайда Лоренца	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	$c^{-1}$	$\frac{1}{4\pi c}$	$c^{-1}$
СИ	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} c^2$	$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}$	1	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	$\mu_0\epsilon_0 = c^{-2}$

Ниже будет использоваться система единиц Гаусса, которая субъективно наиболее проста.

## §7 Скалярный и векторный потенциалы.

Система уравнений Максвелла в вакууме в системе единиц Гаусса имеет вид:

$$\begin{aligned} a) \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho; & b) \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ c) \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & d) \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \end{aligned} \quad (62)$$

Система уравнений (62) является системой уравнений в частных производных. Данная система сводится к неоднородным уравнениям д'Аламбера, решение которых хорошо известны. С этой целью для описания электромагнитного поля вводятся новые величины, получившие название скалярного и векторного потенциалов.

### Потенциалы

Как следует из уравнения (62.b), вектор индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$  можно представить в виде:

$$\mathbf{B} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (63)$$

где  $\mathbf{A}$  - вектор, получивший название *векторного потенциала*. Равенство (63) является определением векторного потенциала. С учетом данного определения уравнение (62.c) можно переписать в виде:

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (64)$$

Из данного равенства вытекает, что

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (65)$$

Здесь  $\varphi$  - скалярная функция, называемая скалярным потенциалом. Знак минус в (65) выбран в соответствии с историческими определениями.

### Градиентная инвариантность потенциалов

Соотношения (64) и (65) определяют векторный и скалярный потенциалы неоднозначно. Так векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции. Пусть, например,

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi, \quad (66)$$

где  $\chi$  - произвольная скалярная функция. Подставляя (66) в (63) получим:

$$\mathbf{B}' = \operatorname{rot} \left( \mathbf{A} + \operatorname{grad} \chi \right) = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

Таким образом и  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}'$  приводят к одному значению вектора индукции  $\mathbf{B}$ .

Найдем как должен преобразовываться скалярный потенциал  $\varphi$ , чтобы вектор  $\mathbf{E}$  не менялся. Из (65) с учетом (66) имеем:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{A}' - \operatorname{grad} \chi \right) - \operatorname{grad} \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \left( \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right).$$

То есть преобразование скалярного потенциала вида

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

не меняет значения электрического поля. Следовательно скалярный потенциал определен с точностью до производной по времени от функции  $\chi$ .

Инвариантность электромагнитного поля относительно преобразований

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad}\chi; \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (67)$$

называется *градиентной инвариантностью*, а преобразования (67) градиентными преобразованиями.

### Уравнения для потенциалов

Чтобы найти уравнения, которым удовлетворяют векторный и скалярный потенциалы подставим в закон Кулона (62.а) соотношение (65):

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div}\mathbf{A}. \quad (68)$$

Подставив (63) и (65) в обобщенный закон Ампера (62.д) получим следующие векторное уравнение:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \text{grad}\left(\text{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \quad (69)$$

### Калибровка потенциалов

Уравнения (68) и (69) позволяют определить значения векторного и скалярного потенциалов, но сами эти уравнения достаточно сложны. Однако в силу произвольности функции  $\chi$  градиентная инвариантность означает, что на  $\mathbf{A}$  и  $\varphi$  можно наложить дополнительные условия, которые называются условиями калибровки потенциалов. Традиционно используются два условия калибровки. Условие калибровки Лоренца:

$$\text{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (70)$$

и условие калибровки Кулона:

$$\text{div}\mathbf{A} = 0. \quad (71)$$

### Калибровка Лоренца

Уравнения (68) и (69) можно записать в более удобном виде воспользовавшись отмеченной выше калибровочной инвариантностью потенциалов. При этом, если использовать условие калибровки Лоренца (70), то из уравнений (68) и (69) получим неоднородные волновые уравнения д'Аламбера:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \quad (72)$$

Система уравнений (72) совместно с определениями векторного и скалярного потенциалов полностью эквивалентна системе уравнений Максвелла и решение этой системы при отсутствии специальных граничных условий можно выписать при произвольных  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'; \quad \varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (73)$$

где  $\tau = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ . Решения неоднородных волновых уравнений (72) вида (73) называются запаздывающими потенциалами, так как значение поля в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$  определяется распределением зарядов и токов в предшествующие моменты времени. Это соответствует принципу причинности в физике. Уравнения (72) имеют также отличные от нуля решения вида (73) в которых  $\tau = t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ . Такие решения называются опережающими и так как они не соответствуют принципу причинности в физических решениях опускаются.

### Кулоновская калибровка

При использовании кулоновской калибровки система уравнений Максвелла для определения скалярного и векторного потенциалов будет иметь вид:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \text{grad}\left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right); \quad \Delta\varphi = -4\pi\rho. \quad (74)$$

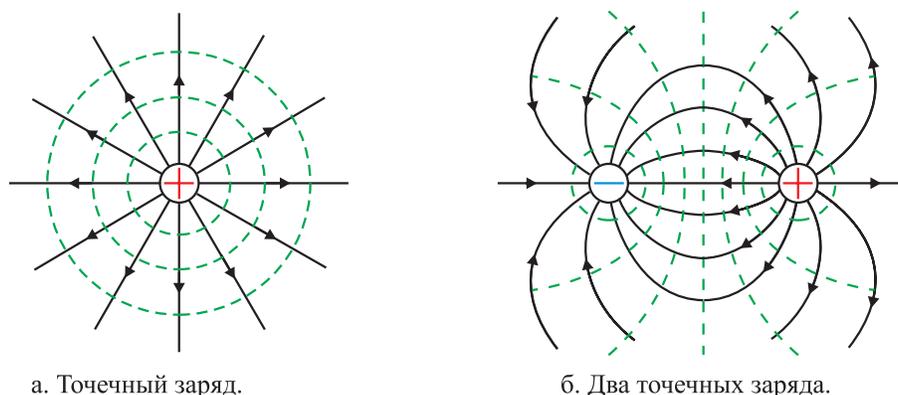


Рис. 11:

Именно потому, что уравнение для скалярного потенциала в этом случае совпадает с уравнением для скалярного потенциала электростатического поля, такая калибровка потенциалов и называется кулоновской.

При описании поля с использованием скалярного потенциала, поверхности на которых значение скалярного потенциала постоянно называются эквипотенциальными поверхностями. Для электростатического поля, так как  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ , силовые линии электростатического поля ортогональны эквипотенциальным поверхностям. На рисунках 11 а,б приведены несколько простейших примеров эквипотенциальных поверхностей для различных систем.

## §8 Электромагнитное поле в веществе.

Система уравнений Максвелла (62) или (72) справедлива в случае описания электромагнитного поля в вакууме, вернее в пространстве, в котором задано некоторое абстрактное распределение плотности заряда и тока. Общая задача электродинамики - это описание электромагнитного поля в веществе.

Вещество состоит из атомов или молекул. Атомы или молекулы - это микрообъекты с характерными размерами  $a_0 \approx 10^{-8}$  см., которые имеют положительно заряженный центр (или центры) - ядро (с размерами  $\approx 10^{-12}$  см.) на расстоянии  $\approx a_0$  от которого локализовано определенное число отрицательно заряженных частиц - электронов. Очевидно, что характерное значение напряженности поля ядра на расстояниях порядка  $a_0$  от ядра составляет величину порядка  $E_0 \approx e/a_0^2 \approx 10^9$  в/см.

Значения напряженностей полей, которые в настоящее время достигаются в экспериментальных условиях (без учета лазерной техники) имеют порядок величины  $\approx 10^4$  в/см  $\div$   $10^5$  в/см, а с использованием квантовых генераторов  $\approx 10^8$  в/см  $\div$   $10^9$  в/см и выше. Таким образом, в веществе от точки к точке происходит резкое, скачкообразное по макроскопическим размерам изменение микроскопического, то есть определенного в математической точке поля.

Действительно, внутри атома  $E \approx E_0 \approx 10^9$  в/см, а вне атома  $E \approx 0$ , так как все электроны экранируют заряд атомного ядра. Прибор, измеряющий значение напряженности поля, например, пробный заряд, имеет макроскопические размеры в лучшем случае  $\approx 10^{-4}$  см. Это означает, что такой прибор "измеряет" поле не в точке, а в некотором объеме, содержащем огромное число атомов. Из-за этого нужно говорить не о микроскопическом значении поля, а о его среднем значении, эффективно эквивалентном действию внешнего поля и полей всех атомов в объеме пробного заряда. Такое значение поля будем называть **макроскопическим** или усредненным по некоторому объему. Объем усреднения это, вообще говоря, объем который должен быть мал по сравнению с характерными макроскопическими размерами, но велик по сравнению с  $a_0^3$ , чтобы внутри объема имелось большое число атомов, позволяющих вводить среднее значение физических величин. Такой объем называется *физически бесконечно малым* объемом.

Определим среднее по физически бесконечно малому объему следующим образом:

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V f dV \quad (75)$$

### Свободные и связанные заряды.

В соответствии с общими представлениями об атомах и молекулах определим *заряды, входящие в состав атомов и молекул*, как связанные заряды и их плотность обозначим через  $\rho_{in}$ , а *заряды не входящие в состав атомов и молекул назовем свободными зарядами* и их плотность обозначим через  $\rho$ . Таким образом полная плотность заряда в веществе есть  $\rho + \rho_{in}$ . Полную плотность тока также можно записать в виде  $\mathbf{j} + \mathbf{j}_{in}$ , где  $\mathbf{j}$  - плотность тока свободных зарядов, а  $\mathbf{j}_{in}$  - плотность тока связанных в атомах и молекулах зарядов.

### Уравнения для микроскопического поля

Обозначим значение напряженности в точке через  $\mathbf{e}$ , а значение вектора индукции через  $\mathbf{b}$ . Поля определенные в математической точке будем называть микроскопическими. Запишем систему уравнений Максвелла для микроскопических значений полей при наличии вещества в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi(\rho + \rho_{in}); \quad \operatorname{div} \mathbf{b} = 0; \quad \operatorname{div}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{in}) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho + \rho_{in}) = 0; \quad (76)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{b} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{in}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}.$$

Усредним систему уравнений (76) по физически бесконечно малому объему. В соответствии с (75) получим:

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{e} \rangle = 4\pi \langle \rho + \rho_{in} \rangle; \quad \operatorname{div} \langle \mathbf{b} \rangle = 0; \quad \operatorname{div} \langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho + \rho_{in} \rangle = 0; \quad (77)$$

$$\operatorname{rot} \langle \mathbf{e} \rangle = -\frac{1}{c} \frac{\partial \langle \mathbf{b} \rangle}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \langle \mathbf{b} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle + \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \mathbf{e} \rangle}{\partial t}.$$

### Уравнения для макроскопического поля

В силу того, что физически бесконечно малый объем  $V$  имеет малые размеры в сравнении с характерными макроскопическими размерами, получим:  $\langle \rho \rangle \approx \rho$  и  $\langle \mathbf{j} \rangle \approx \mathbf{j}$ , так как  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  по объему  $V$  практически постоянны. Этого нельзя сказать о  $\rho_{in}$  и  $\mathbf{j}_{in}$ , которые меняются в размерах  $\approx a_0 \ll V^{1/3}$ . Обозначим  $\langle \mathbf{e} \rangle \equiv \mathbf{E}$  и  $\langle \mathbf{b} \rangle \equiv \mathbf{B}$  и будем называть эти величины напряженностями поля и вектором индукции, понимая их в макроскопическом смысле, т.е. относящимися к целому физически бесконечно-малому объему. В результате система уравнений (77) будет иметь вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \left[ \rho + \langle \rho_{in} \rangle \right]; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{div} \left[ \mathbf{j} + \langle \mathbf{j}_{in} \rangle \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho + \langle \rho_{in} \rangle \right] = 0; \quad (78)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \left[ \mathbf{j} + \langle \mathbf{j}_{in} \rangle \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

В полученных уравнениях величины  $\langle \rho_{in} \rangle$  и  $\langle \mathbf{j}_{in} \rangle$  определяются свойствами среды и должны быть рассчитаны в соответствии с принципами квантовой механики. Однако можно установить некоторые общие соотношения для  $\langle \rho_{in} \rangle$  и  $\langle \mathbf{j}_{in} \rangle$  без использования квантовомеханической теории. Эти соотношения рассмотрены в следующих параграфах.

## §9 Поляризация среды. Дипольный момент.

Для произвольной системы  $N$  штук зарядов  $q_i$  вводится векторная величина, которая называется дипольным моментом. Дипольный момент системы точечных зарядов есть вектор, построенный по следующему определению:

$$\mathbf{d} \equiv \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{r}_i. \quad (79)$$

В случае электронейтральной системы (когда  $\sum_{i=1}^N q_i = 0$ ) определение дипольного момента (79) не зависит от выбора начала координат в пространстве.

Если заряд распределен в пространстве  $V$  непрерывно, то определение (79) имеет вид:

$$\mathbf{d} = \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dv. \quad (80)$$

### Вектор поляризации среды

Если вещество помещено во внешнее электрическое поле, то оно поляризуется (происходит смещение центров тяжести положительных и отрицательных зарядов в атомах) т.е. в веществе появляется дипольный момент, который можно описать дипольным моментом единицы объема  $\mathbf{P} \equiv d\mathbf{d}/dv$ . Вектор  $\mathbf{P}$  называется *вектором поляризации*. Используя определение вектора поляризации очевидно, что дипольный момент бесконечно малого объема  $dv$  равен:  $\mathbf{P} dv$ . Соответственно дипольный момент вещества в объеме  $V$ :

$$\mathbf{d} = \int_V \mathbf{P} dv \quad (81)$$

Дипольный момент единицы объема, по определению, это макроскопическая величина (среднее внутри бесконечно малого объема), следовательно  $\langle \mathbf{P} \rangle = \mathbf{P}$ . В соответствии с (80) и (81) можно установить связь  $\rho_{in}$  с  $\mathbf{P}$ . Действительно, если свободных зарядов нет, единственной причиной возникновения дипольного момента единицы объема вещества являются заряды в составе атома, плотность которых  $\rho_{in}$ . В результате имеем следующее интегральное равенство:

$$\int_V \mathbf{r} \rho_{in}(\mathbf{r}) dv = \int_V \mathbf{P} dv. \quad (82)$$

### Вспомогательное равенство.

Для того чтобы установить непосредственную связь объемной плотности связанных зарядов с вектором поляризации, рассмотрим несколько векторных вспомогательных равенств. Инвариантное интегральное определение оператора  $\vec{\nabla}$  имеет вид:

$$\vec{\nabla} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S (\mathbf{n} \cdot d\mathbf{s}) \quad (83)$$

В соответствии с (83) для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  можно составить выражение:

$$(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} ds, \quad (84)$$

или

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} dv = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} ds. \quad (85)$$

С учетом дифференциальных свойств оператора  $\vec{\nabla}$  для подынтегрального выражения в левой части равенства (85) имеем:

$$(\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} = (\vec{\nabla} \cdot \check{\mathbf{a}}) \mathbf{b} + (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{a}) \check{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{b},$$

здесь значок  $\vec{\nabla}$  над буквой обозначает действие оператора  $\vec{\nabla}$  на соответствующий вектор. В результате равенство (85) примет вид:

$$\int_V \left[ \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{b} \right] dv = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} ds. \quad (86)$$

Так как векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  произвольные, положим в равенстве (86)  $\mathbf{a} \equiv \mathbf{P}$  и  $\mathbf{b} \equiv \mathbf{r}$ . Учитывая, что  $(\mathbf{P} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{r} \equiv \mathbf{P}$  имеем:

$$\int_V \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dv + \int_V \mathbf{P} dv = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}) \mathbf{r} ds. \quad (87)$$

В силу произвольности объема интегрирования можно выбрать  $V$  так, что поверхность интегрирования  $S$  в (87) будет лежать вне вещества. А так как вне объема вещества  $\mathbf{P} = 0$ , то поверхностный интеграл в (87) можно считать равным нулю, т.е.:

$$\int_V \mathbf{P} dV = - \int_V \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} dV \quad (88)$$

**Связь  $\mathbf{P}$  с  $\langle \rho_{in} \rangle$ .**

Сравнивая (88) с (82) находим, что  $\rho_{in} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ , а учитывая, что  $\langle \mathbf{P} \rangle = \mathbf{P}$  получим:

$$\langle \rho_{in} \rangle = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (89)$$

Смысл формулы (89) состоит в том, что данное выражение устанавливает связь среднего значения микроскопической величины по физически бесконечно малому объему  $\langle \rho_{in} \rangle$  с макроскопической величиной  $\mathbf{P}$ , которая может быть экспериментально измерена. И таким образом удастся обойтись без квантовомеханического описания атомов вещества при построении элементарной теории электрического поля в веществе. Конечно, при этом теряется строгость теории и фактически вводится феноменологическое описание поля в веществе.

### Примеры

Введенная в данном параграфе величина - дипольный момент системы зарядов играет большую роль в теории электромагнитного поля. Ниже приведены примеры на вычисление дипольного момента некоторых систем.

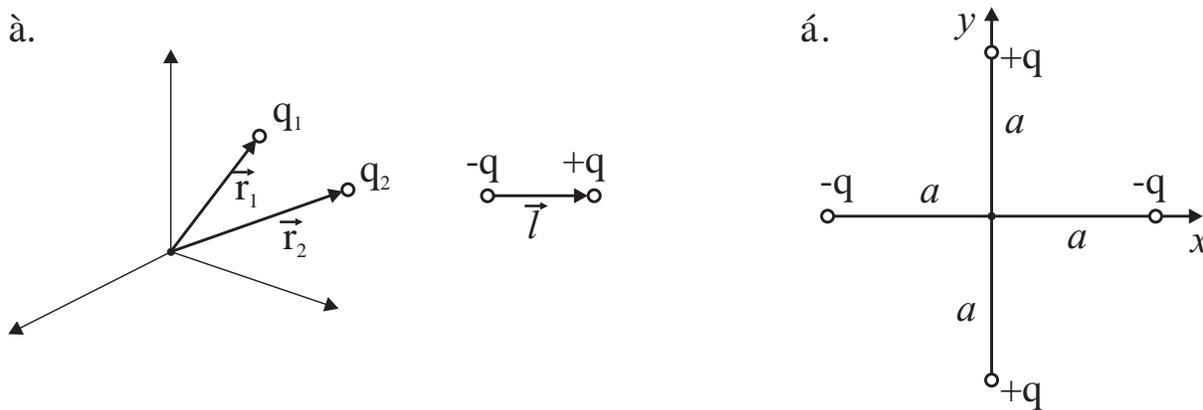


Рис. 12:

**Диполь.**

1. **Два точечных заряда.** Для системы двух точечных зарядов  $q_1, q_2$  дипольный момент равен (см. рис. 12а):

$$\mathbf{d} = \sum_{i=1}^2 q_i \mathbf{r}_i = q_1 \mathbf{r}_1 + q_2 \mathbf{r}_2 \quad (90)$$

В случае если заряды равны и противоположны по знаку, возникает система, которая называется **диполем**. При этом дипольный момент диполя равен  $q\mathbf{l}$ , где  $\mathbf{l}$  - вектор, численно равный расстоянию между зарядами системы, направленный от отрицательного заряда к положительному.

#### Квадруполь.

2. Система из четырех зарядов, равноотстоящих от начала координат, изображенная на рисунке 12b носит название **квадруполь**. Непосредственные вычисления показывают, что дипольный момент такой системы равен нулю.

#### Равномерно заряженные шар и половина шара.

3. **Равномерно заряженный шар.** В силу сферической симметрии, дипольный момент шара, вычисленный в системе координат, связанной с центром шара равен нулю, так как в пространстве нет выделенного направления, а так как дипольный момент - вектор, он должен быть направлен вдоль выделенного направления.

4. Равномерно заряженная **половина шара, радиуса  $R$** .

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho \left[ \mathbf{i} r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{j} r \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{k} r \cos \theta \right] r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \mathbf{k} 2\pi \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^1 x dx = \mathbf{k} \frac{3}{8} R Q, \end{aligned}$$

где  $Q$  - заряд половины шара.

## § 10 Магнитный момент.

Важной характеристикой, используемой при описании электромагнитного поля является магнитный момент тока. Если в пространстве задана плотность тока  $\mathbf{j}$ , то векторная величина определяемая следующим соотношением

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv, \quad (91)$$

называется магнитным моментом системы токов. Здесь  $c$  - скорость света.

Для линейного замкнутого тока, с учетом (12), определение магнитного момента линейного тока имеет вид:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \oint_L I [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}]. \quad (92)$$

По определению магнитный момент системы токов связан с механическим моментом  $\mathbf{L}$ , который например для системы  $N$  частиц равен  $\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i$ , где  $\mathbf{l}_i = [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i]$ ,  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ ,  $m_i$  - масса,  $\mathbf{v}_i$  - скорость  $i$ -ой частицы. Для доказательства рассмотрим систему, состоящую из одного точечного заряда. В этом случае  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\mathbf{v}$  и в соответствии с (91) для магнитного момента точечного заряда имеем:

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}' \times q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}')] dv' = \frac{q}{2c} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{q}{2mc} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}], \\ \vec{\mu} &= \frac{q}{2mc} \mathbf{l} = \frac{|q|}{2mc} \text{sign}(q) \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (93)$$

Для системы частиц с одинаковыми зарядами и массами находим

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^N \vec{\mu}_k = \sum_{k=1}^N \frac{q}{2mc} \mathbf{l}_k = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}. \quad (94)$$

### Пример

Для примера использования формулы (92) вычислим магнитный момент кругового тока радиуса  $R$  с силой тока  $I = const$ . Пусть ток  $I$  расположен в плоскости  $x - y$  и центр круга совпадает с началом системы координат. Учитывая симметрию задачи ясно, что в любой точке кругового тока  $[\mathbf{r} \times d\mathbf{l}] = const$ . Вычислим это векторное произведение в точке на оси  $y$  (рис. 13):

$$\vec{\mu} = \frac{I}{2c} \oint_R [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}] = \frac{I}{2c} \oint_R \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & y = R & 0 \\ -dl & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{I \pi R^2}{c} \mathbf{k} = \frac{IS}{c} \mathbf{k}, \quad (95)$$

где  $S$  - площадь ограниченная током  $I$ . Последнее соотношение общее и не зависит от формы контура с током.

### Вектор намагничивания

Если вещество помещено во внешнее магнитное поле, то в атомах или молекулах этого вещества появляются токи связанных зарядов (плотность которых обозначим через  $\mathbf{j}_{in}$ ). Таким образом в атомах возникают магнитные моменты от  $\mathbf{j}_{in}$ . В результате, в веществе возникает суммарный магнитный момент или намагниченность. Для описания свойств намагниченности можно ввести понятие магнитного момента единицы объема  $\mathbf{M}$  по следующему определению:

$$\mathbf{M}_s = \int_V \mathbf{M} dv, \quad (96)$$

где  $\mathbf{M}_s$  - магнитный момент вещества в целом. По определению (96)  $\mathbf{M}$  является макроскопической величиной, т.е.  $\langle \mathbf{M} \rangle = \mathbf{M}$ .

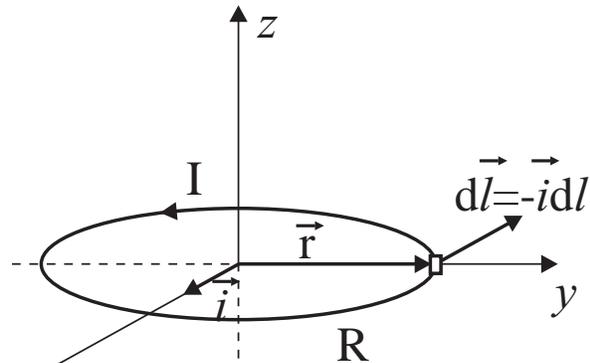


Рис. 13:

## §11 Параметризация средней плотности тока связанных зарядов в линейной электродинамике.

При построении теории электромагнитного поля в среде в системе уравнений Максвелла появились два параметра  $\langle \rho_{in} \rangle$  и  $\langle \mathbf{j}_{in} \rangle$ , которые требуют детального квантовомеханического описания структуры и свойств среды. В результате теряется универсальность подхода описания поля в среде. В предыдущих параграфах удалось выразить  $\langle \rho_{in} \rangle$  через экспериментально измеряемую величину - вектор поляризации среды. Аналогично при построении феноменологической электродинамики необходимо выразить и  $\langle \mathbf{j}_{in} \rangle$  через макроскопическую (экспериментально измеряемую) величину

Покажем, что  $\langle \mathbf{j}_{in} \rangle$  приближенно выражается через магнитный момент единицы объема вещества. На основании (78) можно утверждать, что в самом общем случае  $\langle \mathbf{j}_{in} \rangle$  является функцией вида:

$$\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle = \mathbf{f} \left( \mathbf{E}, \mathbf{B}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \text{rot} \mathbf{E}, \text{rot} \mathbf{B}, \text{div} \mathbf{E}, \text{div} \mathbf{B}, \text{substance} \right) \quad (97)$$

### Линейная электродинамика

В общем случае явный вид этой функции не известен. Поэтому требуется какое-либо приближение для ее определения. В первом приближении среду можно характеризовать величиной внутриатомного поля. Если поле создается источником излучения не лазерного типа, то величина этого поля много меньше внутриатомного поля. Таким образом, в теории может быть использован параметр отношения внешнего поля к внутриатомному. В связи с этим, можно произвести разложение функции (97) в ряд Тейлора и ограничиться только линейными по полю слагаемыми, для случая слабого внешнего поля. При этом необходимо оставлять слагаемые, имеющие те же трансформационные свойства, что и плотность тока  $\mathbf{j}$ . Исходя из определения ясно, что  $\mathbf{j}$  - полярный (истинный) вектор. Это утверждение вытекает из определения  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ , так как  $\mathbf{v}$  - истинный вектор, а  $\rho$  - истинный скаляр. Поэтому в разложении функции (97) в ряд могут появиться только слагаемые, которые являются истинными векторами. В результате для однородной изотропной среды разложение  $\mathbf{f}$  в ряд с точностью до слагаемых первого порядка по полю можно представить в виде:

$$\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle = \sigma \mathbf{E} + \kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + c\alpha \operatorname{rot} \mathbf{B} + \dots, \quad (98)$$

где  $\sigma$ ,  $\kappa$ ,  $\alpha$  - коэффициенты разложения,  $c$  - скорость света.

Выражение (98) справедливо в случае однородной изотропной среды. В общем случае не изотропной среды оно может быть представлено для компонент плотности тока ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle_i = \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \left( \mathbf{E} \right)_k + \sum_{k=1}^3 \kappa_{ik} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)_k + c \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \left( \operatorname{rot} \mathbf{B} \right)_k + \dots \quad (99)$$

Выражения (98) и (99) получены с учетом линейных по полю слагаемых (то есть для случая, когда внешнее поле много меньше внутриатомного). Такое приближение приводит к построению линейной электродинамики для описания поля в среде. В случае, если внешние поля сравнимы с внутриатомными необходимо использовать слагаемые более высоких порядков по полю в представленном выше разложении. В этом случае речь идет о нелинейной электродинамике, построение которой не входит в задачи данного курса.

Для формулировки линейной электродинамики необходимо выяснить смысл коэффициентов, появившихся в разложении (98), (99)

## §12 Физический смысл слагаемых в $\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle$ .

Рассмотрим смысл отдельных членов в выражении (98) для определения коэффициентов разложения.

### Удельная проводимость.

Покажем, что соотношение вида  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  соответствует закону Ома в случае линейных проводников. По определению силы тока, протекающего через поперечное сечение проводника  $S$  имеем:

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (100)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в правой части равенства (100):

$$\sigma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \sigma (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) ds = \sigma \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})}{\frac{1}{ds}} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dl}{\frac{dl}{\sigma ds}} = \frac{\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\rho \frac{dl}{ds}} \quad (101)$$

где  $\rho = 1/\sigma$ , а  $d\mathbf{l} = \mathbf{n} dl$ . Для бесконечно тонкого проводника направление нормали  $\mathbf{n}$  к сечению  $ds$  совпадает с направлением касательной к проводнику. Таким образом, для линейного проводника получим:

$$I = \int_L \frac{\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}{\rho \frac{dl}{ds}} \quad (102)$$

### Закон Ома.

Если проводник имеет постоянное сечение, то  $dl/ds = const = l/S$  и в случае, когда  $\rho$  не зависит от координат величина  $R = \rho l/S$  - постоянная. Нетрудно видеть, что  $R$  есть определение сопротивления линейного проводника длины  $l$ , сечение которого  $S$ , если  $\rho$  - удельное сопротивление проводника. Таким образом  $\sigma = 1/\rho$  - есть удельная проводимость, а выражение (102) в случае линейного однородного проводника имеет вид закона Ома для участка цепи:

$$I = \frac{1}{R} \int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{R} \int_L (\nabla\varphi) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{R} \int_1^2 d\varphi = \frac{\varphi(1) - \varphi(2)}{R} = \frac{U}{R}. \quad (103)$$

В связи с этим выражение

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (104)$$

называется *законом Ома в дифференциальной форме*. В общем случае формула (104) приближена и в точном выражении содержатся более высокие степени разложения по напряженности поля. Представленные рассуждения позволяют интерпретировать смысл коэффициента  $\sigma$  в (98) как удельную проводимость проводника. Для неизотропной среды появляется набор коэффициентов  $\sigma_{ik}$ , ( $i, k = 1, 2, 3$ ), которые определяют тензор удельной проводимости в (99)

### Диэлектрическая восприимчивость.

Для выяснения смысла второго слагаемого в (98) вычислим  $\text{div}$  от правой и левой сторон равенства (98)

$$\text{div}(\mathbf{j} + \langle \mathbf{j}_{in} \rangle) = \text{div}(\sigma \mathbf{E}) + \text{div}\left(\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \quad (105)$$

С учетом закона сохранения заряда и выражения (104) получаем из (105)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho_{in} \rangle = \text{div}\left(\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right). \quad (106)$$

Используя (89) и считая  $\kappa$  параметром не зависящим от времени находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\kappa \mathbf{E}), \quad (107)$$

или  $\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}$ . Коэффициент пропорциональности  $\kappa$  между вектором напряженности и вектором поляризации называется коэффициентом поляризации или коэффициентом диэлектрической восприимчивости вещества. В случае неизотропной среды  $k_{ij}$  - называется тензором диэлектрической восприимчивости. Таким образом, второе слагаемое в (98) имеет вид:

$$\kappa \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (108)$$

и показывает, что изменение вектора поляризации во времени эквивалентно появлению тока, который получил название ток поляризации, а плотность тока поляризации равна скорости изменения дипольного момента единицы объема:

$$\mathbf{j}_{pol} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (109)$$

Выясним теперь смысл третьего слагаемого в соотношении (98). Для этого умножим равенство (98) векторно на  $\mathbf{r}$  и проинтегрируем по произвольному объему  $V$ :

$$\int_V \left[ \mathbf{r} \times \langle \mathbf{j}_{in} \rangle \right] dv = \int_V \left[ \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] dv + \alpha c \int_V \left[ \mathbf{r} \times \text{rot} \mathbf{B} \right] dv \quad (110)$$

Слагаемое с током поляризации равно нулю в силу следующих рассуждений:

$$\left[ \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right] = \left[ \mathbf{r} \times \frac{\partial}{\partial t} \rho_{in} \mathbf{r} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \rho_{in} [\mathbf{r} \times \mathbf{r}] = 0. \quad (111)$$

Считая  $\alpha$  постоянной величиной введем обозначение  $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{B}$ , в результате получим:

$$\int_V [\mathbf{r} \times \text{rot}\mathbf{M}] = \frac{1}{c} \int_V [\mathbf{r} \times \langle \mathbf{j}_{in} \rangle] dv. \quad (112)$$

### Вспомогательное равенство.

Для дальнейших преобразований рассмотрим вспомогательное интегральное соотношение, которое можно вывести из интегрального определения оператора  $\vec{\nabla}$ . Для произвольных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеем:

$$[\vec{\nabla} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S [[\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b}] dS,$$

или в интегральном виде:

$$\int_V [[\vec{\nabla} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b}] dV = \oint_S [[\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b}] dS. \quad (113)$$

С учетом дифференциальных свойств оператора  $\vec{\nabla}$  подынтегральное выражение в интеграле по объему  $V$  равно:

$$[[\vec{\nabla} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b}] = -[\mathbf{b} \times \text{rota}] - [\mathbf{a} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{b}.$$

Таким образом, соотношение (113) имеет вид:

$$\int_V [\mathbf{b} \times \text{rota}] dV + \int_V [[\mathbf{a} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{b}] dV = - \oint_S [[\mathbf{n} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{b}] dS. \quad (114)$$

Данное соотношение справедливо для любых векторов, являющихся непрерывными функциями координат.

Положим в (114)  $\mathbf{b} = \mathbf{r}$  и  $\mathbf{a} = \mathbf{M} = \alpha\mathbf{B}$ . Выберем в качестве объема интегрирования все пространство. При этом на бесконечно больших расстояниях поле  $\mathbf{B}$  равно 0, то есть  $\mathbf{M}$  на бесконечно удаленной поверхности равен нулю. Таким образом поверхностный интеграл в (114) равен нулю. В результате получаем:

$$\int_V [\mathbf{r} \times \text{rot}\mathbf{M}] dv = - \int_V [[\mathbf{M} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{r}] dv \quad (115)$$

Вычислим двойное векторное произведение входящее в правую сторону равенства (115):

$$\begin{aligned} [[\mathbf{M} \times \vec{\nabla}] \times \mathbf{r}] &= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} [\mathbf{M} \times \vec{\nabla}]_i x_j \mathbf{e}_k = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \sum_{l,m=1}^3 \varepsilon_{lmi} M_l \frac{\partial}{\partial x_m} x_j \mathbf{e}_k = \sum_{i,j,k,l,m=1}^3 \varepsilon_{ilk} \varepsilon_{lmi} M_l \delta_{jm} \mathbf{e}_k = \\ &= \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lji} M_l \mathbf{e}_k = - \sum_{i,j,k,l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijl} M_l \mathbf{e}_k = - \sum_{k,l=1}^3 2\delta_{kl} M_l \mathbf{e}_k = -2\mathbf{M}. \end{aligned} \quad (116)$$

Здесь  $\varepsilon_{ijk}$  - полностью антисимметричный тензор третьего ранга (тензор Леви-Чевита)

В результате находим:

$$\int_V [\mathbf{r} \times \text{rot}\mathbf{M}] dv = 2 \int_V \mathbf{M} dv. \quad (117)$$

Подставляя (117) в (112) получаем:

$$\int_V \mathbf{M} dv = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \langle \mathbf{j}_{in} \rangle] dv \quad (118)$$

### Вектор намагничения.

Отсюда следует физическая интерпретация ранее определенного вектора  $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{B}$ . Действительно, по определению (91) интегральное слагаемое, содержащее  $\mathbf{j}_{in}$  в (118) есть магнитный момент, возникающий в веществе из-за наличия токов в атоме. Таким образом из (118) следует, что  $\mathbf{M}$  - это магнитный момент единицы объема вещества или вектор намагниченности. В свою очередь коэффициент  $\alpha$  называется магнитной восприимчивостью вещества и может быть измерен экспериментально для конкретного вещества.

Так как смысл всех коэффициентов разложения в (98) установлен, приведенные рассуждения позволяют записать следующее общее выражение:

$$\langle \mathbf{j}_{in} \rangle = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} \quad (119)$$

и тем самым выразить среднее значение плотности тока связанных зарядов в атоме через макроскопические (экспериментально измеряемые) параметры

### § 13 Система уравнений Максвелла в среде.

#### ВЕj -форма

При усреднении системы уравнений Максвелла по физически бесконечно малому объему получается система уравнений (78), которая получила название **ВЕj** –форма записи системы уравнений Максвелла. Такая форма записи, практически, не применяется в приложениях в силу отсутствия универсального характера записи уравнений электромагнитного поля. Для каждого вещества необходимо уметь строить  $\langle \rho_{in} \rangle$  и  $\langle \mathbf{j}_{in} \rangle$ , что требует привлечения методов квантовой механики и статистической физики, и в большинстве случаев является трудно разрешимой задачей. Теоретический подход построения теории электромагнитного поля в веществе, основанный на этих принципах, приведен, например в [1].

#### ВЕНД – форма

Более универсальным, хотя и менее обоснованным, является подход, основанный на параметризации средних значений плотности заряда и плотности тока связанных в атомах зарядов. В этом случае, подставляя (119) и (89) в (78) получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho - 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}; & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M} \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; & \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (120)$$

Введем новые векторы - вектор индукции электрического поля  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  и вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ . В результате система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в среде примет следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (121)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}. \quad (122)$$

Последние два соотношения называются материальными уравнениями или уравнениями связи. Необходимо подчеркнуть, что свойства среды включены в векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$ , которые считаются известными при описании поля в среде. Методы определения этих векторов лежат вне области классической электродинамики.

В стандартной задаче электродинамики требуется найти поле при известных значениях  $\rho$  и  $\mathbf{j}$ . В соответствии с (121), в этом случае, в среде необходимо найти 4 вектора  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  или 12 независимых функций (по три проекции каждого из четырех векторов). Учитывая материальные уравнения, в которых

векторы  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{M}$  считаются известными векторными параметрами, задающими свойства среды, из 12 неизвестных функций независимыми являются только 6. Непосредственно дифференциальных уравнений Максвелла – 8 (два скалярных – Закон Кулона и закон отсутствия магнитных зарядов, и два векторных – закон электромагнитной индукции Фарадея и обобщенный закон Ампера). Независимых из этих восьми уравнений является шесть в силу двух связей в этих уравнениях. Одна связь устанавливается законом сохранения заряда. Вторая связь вытекает из закона электромагнитной индукции. Если вычислить ротор от правой и левой частей дифференциальной формы закона Фарадея, то получим  $\operatorname{div} \mathbf{B} = \text{const}$ , что совпадает с законом отсутствия магнитных зарядов, который собственно определяет величину этой константы. Таким образом в системе уравнений Максвелла шесть независимых уравнений для определения шести неизвестных функций. Следовательно задача определения поля может быть решена однозначно.

Часто система уравнений (121) называется системой уравнений Максвелла для описания поля в среде в **ВЕНД** -форме по буквам, используемым для обозначения векторов, определяющих свойства поля в среде.

### **ВЕНД – форма**

В ряде случаев вместо системы (121) используется еще одна форма записи системы уравнений, связанная с иным определением вектора индукции электрического поля, получившего название обобщенного вектора индукции. Часто в литературе не делается различий в написании такого вектора или этот вектор обозначается  $\mathbf{D}^*$ , что не является знаком операции комплексного сопряжения. Ниже такой вектор будет обозначаться буквой  $\vec{\mathcal{D}}$ . Обобщенный вектор индукции поля вводится по следующему определению:

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \equiv \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi \langle \mathbf{j}_{in} \rangle, \quad (123)$$

или

$$\vec{\mathcal{D}}(t) = \mathbf{E}(t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \langle \mathbf{j}_{in}(t') \rangle dt'. \quad (124)$$

Если вычислить  $\operatorname{div} \vec{\mathcal{D}}$  в выражении (124) получим:

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{D}}(t) = \operatorname{div} \mathbf{E}(t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \operatorname{div} \langle \mathbf{j}_{in}(t') \rangle dt' = 4\pi \rho$$

Система уравнений Максвелла в этом случае принимает следующий вид:

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{D}} = 4\pi \rho; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}.$$

и называется **ВЕНД** - формой записи системы уравнений Максвелла. Часто такая форма используется для описания высокочастотных полей.

## **§ 14 Фурье-преобразования системы уравнений Максвелла.**

### **§ 15 Векторы Герца.**

При описании электромагнитного поля в веществе система уравнений Максвелла имеет вид (121). Данную систему уравнений в частных производных для ограниченных электронейтральных систем можно свести к неоднородным волновым уравнениям д'Аламбера аналогично случаю электромагнитного поля в вакууме. Для этого введем дипольный момент единицы объема системы свободных зарядов  $\mathbf{P}_0$  и магнитный момент единицы объема системы свободных токов  $\mathbf{M}_0$  по определению:

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}_0; \quad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}_0}{\partial t} + c \operatorname{rot} \mathbf{M}_0. \quad (125)$$

Данные соотношения однозначно определяют  $\mathbf{P}_0$  и  $\mathbf{M}_0$  для электронейтральных, замкнутых систем зарядов и токов.

Соотношения (125) обеспечивают выполнение закона сохранения заряда. В результате система уравнений Максвелла (121) переписывается в виде:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0; \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}; \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad (126)$$

где

$$\mathbf{D} \equiv \mathbf{E} + 4\pi(\mathbf{P} + \mathbf{P}_0) = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_\Sigma, \quad (127)$$

$$\mathbf{H} \equiv \mathbf{B} - 4\pi(\mathbf{M} + \mathbf{M}_0) = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}_\Sigma.$$

В выражении (127)  $\mathbf{P}_\Sigma$  и  $\mathbf{M}_\Sigma$  суммарные дипольный и магнитный моменты единицы объема, возникающие из-за всех типов зарядов и токов, и произведено переопределение векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{H}$ .

Аналогично случаю электромагнитного поля в вакууме из (126) следует:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad (128)$$

где  $\mathbf{A}$  - векторный потенциал. Соответственно из (126) и (128) вытекает определение скалярного потенциала:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi. \quad (129)$$

### Определение векторов Герца.

Однако дальнейшее преобразование системы уравнений Максвелла в среде возможно путем введения вспомогательных векторов, которые получили название *векторов Герца*. Векторы Герца электрического  $\Pi_e$  и магнитного  $\Pi_m$  типов определяются соотношениями:

$$\varphi \equiv -\operatorname{div}\Pi_e; \quad \mathbf{A} \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial\Pi_e}{\partial t} + \operatorname{rot}\Pi_m \quad (130)$$

Формулы (130) обеспечивают выполнение условия калибровки Лоренца (70) для скалярного и векторного потенциалов.

Используя (130) найдем как выражается напряженность электрического поля через векторы Герца:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\Pi_e}{\partial t} + \operatorname{rot}\Pi_m\right) + \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi_e = \\ &= \square\Pi_e + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi_e - \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi_m}{\partial t}. \end{aligned} \quad (131)$$

### Уравнения для вектора Герца электрического типа

Для нахождения уравнения, которому удовлетворяет вектор Герца электрического типа, подставим (131) в (126), в результате получим:

$$\operatorname{div}\left(\square\Pi_e + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\Pi_e - \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial\Pi_m}{\partial t} + 4\pi\mathbf{P}_\Sigma\right) = 0.$$

В силу того, что дивергенция ротора произвольного вектора тождественно равна нулю, последнее уравнение эквивалентно равенству:

$$\operatorname{div}\left(\square\Pi_e + 4\pi\mathbf{P}_\Sigma\right) = 0. \quad (132)$$

Отсюда следует, что  $\square\Pi_e + 4\pi\mathbf{P}_\Sigma = \operatorname{rot}\mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  - произвольный вектор. Однако в силу того, что векторы Герца определяются из равенств (130) неоднозначно можно положить  $\mathbf{a} = 0$ . Таким образом вектор Герца электрического типа удовлетворяет волновому уравнению д'Аламбера:

$$\square\Pi_e = -4\pi\mathbf{P}_\Sigma. \quad (133)$$

### Связь с векторами $\mathbf{E}$ , $\mathbf{D}$

И, следовательно, напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и вектор индукции  $\mathbf{D}$  следующим образом выражаются через векторы Герца:

$$\mathbf{E} = -4\pi\mathbf{P}_\Sigma + \text{rot rot } \Pi_e - \frac{1}{c}\text{rot } \frac{\partial\Pi_m}{\partial t}, \quad (134)$$

$$\mathbf{D} = \text{rot} \left( -\frac{1}{c}\frac{\partial\Pi_m}{\partial t} + \text{rot } \Pi_e \right). \quad (135)$$

### Уравнения для вектора Герца магнитного типа.

Подставляя (130) в (127), для вектора индукции  $\mathbf{B}$  получим:

$$\mathbf{B} = \text{rot} \left( \frac{1}{c}\frac{\partial\Pi_e}{\partial t} + \text{rot } \Pi_m \right). \quad (136)$$

Из системы уравнений Максвелла найдем уравнение, которому удовлетворяет вектор Герца магнитного типа:

$$\square\Pi_m = -4\pi\mathbf{M}_\Sigma \quad (137)$$

### Связь с векторами $\mathbf{B}$ , $\mathbf{H}$

Для полноты выпишем соотношения для определения векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  с использованием векторов Герца:

$$\mathbf{B} = \text{rot} \left( \frac{1}{c}\frac{\partial\Pi_e}{\partial t} + \text{rot } \Pi_m \right). \quad (138)$$

$$\mathbf{H} = -4\pi\mathbf{M}_\Sigma + \text{rot} \left( \frac{1}{c}\frac{\partial\Pi_e}{\partial t} + \text{rot } \Pi_m \right). \quad (139)$$

Частные решения уравнений (133) и (137) имеют вид, соответственно:

$$\Pi_e(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{P}_\Sigma(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv',$$

$$\Pi_m(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{M}_\Sigma(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.$$

### Стационарные поля

В случае стационарных полей уравнения для векторов Герца и решения уравнений имеют вид:

$$\nabla^2\Pi_e = -4\pi\mathbf{P}_\Sigma \quad \rightarrow \quad \Pi_e(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{P}_\Sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (140)$$

$$\nabla^2\Pi_m = -4\pi\mathbf{M}_\Sigma \quad \rightarrow \quad \Pi_m(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{M}_\Sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (141)$$

### Неоднозначность векторов Герца.

Как отмечалось выше, векторы Герца определены неоднозначно. Следующие преобразования векторов Герца оставляют векторы поля неизменными:

$$\Pi'_e = \Pi_e + \text{rot } \mathbf{F} - \text{grad } G, \quad \Pi'_m = \Pi_m - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t},$$

где векторная  $\mathbf{F}$  и скалярная  $G$  функции - произвольные решения однородных волновых уравнений

$$\nabla^2 \mathbf{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial t^2} = 0; \quad \nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = 0;$$

### Примеры.

В качестве примера использования векторов Герца рассмотрим поле точечного диполя  $\mathbf{d}$ , расположенного в начале координат. В этом случае суммарный дипольный момент единицы объема равен:  $\mathbf{P}_\Sigma = \delta(\mathbf{r})\mathbf{d}$ . На основании (140), (134), (129) получим:

$$\Pi_e = \frac{\mathbf{d}}{r}; \quad \mathbf{E} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3}; \quad \varphi = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d})}{r^2}, \quad (142)$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор в направлении радиус-вектора. Вектор Герца магнитного типа в этом случае равен нулю.

Аналогично, если в начале координат расположен точечный магнитный момент  $\vec{\mu}$ , то суммарный магнитный момент единицы объема равен:  $\mathbf{M}_\Sigma = \delta(\mathbf{r})\vec{\mu}$ . На основании (141) и связи вектора индукции магнитного поля с векторами Герца получим:

$$\Pi_m = \frac{\vec{\mu}}{r}; \quad \mathbf{B} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \vec{\mu} - \vec{\mu})}{r^3}; \quad \mathbf{A} = \frac{[\vec{\mu} \times \mathbf{r}]}{r^3} \quad (143)$$

## §16 Энергия электромагнитного поля

Вопрос об энергии и импульсе электромагнитного поля имеет принципиальное значение, так как эти характеристики делают очевидным материальность поля.

При введении понятия энергии электромагнитного поля будем исходить из установленных в классической механике определений и понятий. Рассмотрим замкнутую систему зарядов и токов. Замкнутость системы позволяет пренебречь полем на бесконечно удаленной поверхности от выбранной системы. Пусть в рассматриваемой системе присутствуют абстрактные частицы - носители заряда и электромагнитное поле, которое создано этими зарядами. Для замкнутой системы изменение ее энергии обуславливается работой, проделанной над частицами, входящими в систему.

Сила, действующая со стороны поля на  $k$ -ый точечный заряд движущийся со скоростью  $\mathbf{v}_k$ , определяется выражением, установленным экспериментально (сила Лоренца):

$$\mathbf{F}_k = q_k \mathbf{E}_k + \frac{q_k}{c} [\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_k]. \quad (144)$$

Изменение энергии  $k$ -ой частицы под действием силы  $\mathbf{F}_k$ , при перемещении частицы на бесконечно малое расстояние  $d\mathbf{l}_k$  за время  $dt$ , в соответствии с законами классической механики есть:

$$d\varepsilon_k = (\mathbf{F}_k \cdot d\mathbf{l}_k) = (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k) dt. \quad (145)$$

Следовательно для системы  $N$  штук частиц изменение энергии всей системы частиц  $\varepsilon_{part}$  в единицу времени есть:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = \sum_{k=1}^N (\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k).$$

Соответственно для непрерывно распределенного заряда в объеме  $V$  получим:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = \int_V \rho \left\{ \mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \cdot \mathbf{v} dv = \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dv, \quad (146)$$

так как для системы частиц имеет место равенство:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^N q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \quad (147)$$

Выражая плотность тока из обобщенного закона Ампера, на основании (146) находим в случае системы заряды-поле (среды нет)

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \frac{1}{4\pi} \left[ c \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \right) dv. \quad (148)$$

Так как в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея имеет место следующее равенство:

$$- \frac{c}{4\pi} \int_V \left( \mathbf{B} \cdot \left[ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \right) dv = 0, \quad (149)$$

выражение (148) можно переписать в симметричном виде, добавляя к нему нулевое слагаемое (149):

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int_V \left( \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} \right) dv - \frac{1}{4\pi} \int_V \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv. \quad (150)$$

Учитывая, что  $\operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$  для выражения (150) получим:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = - \frac{c}{4\pi} \int_V \operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dv - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) dv. \quad (151)$$

На основании теоремы Остроградского Гаусса найдем из полученного выражения:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = - \frac{c}{4\pi} \oint_{\sigma} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{s} - \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) dv, \quad (152)$$

где  $\sigma$  - поверхность ограничивающая объем  $V$  Интеграл по поверхности  $\sigma$  на бесконечно больших расстояниях обращается в ноль, поэтому имеют место следующие равенства:

$$\frac{d}{dt} \left( \varepsilon_{part} + \int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv \right) = 0; \quad \varepsilon_{part} + \int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv = const. \quad (153)$$

Последнее соотношение можно интерпретировать как закон сохранения энергии и определить энергию электромагнитного поля  $\varepsilon_f$  и энергию единицы объема электромагнитного поля  $w$  следующими соотношениями:

$$\varepsilon_f = \int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv; \quad w = \frac{E^2 + B^2}{8\pi}. \quad (154)$$

Для конечной поверхности  $\sigma$ , ограничивающей выбранный объем  $V$  закон сохранения в интегральном виде определяется равенством (151):

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = - \oint_{\sigma} \left( \mathbf{S} \cdot d\vec{\sigma} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{E^2 + B^2}{8\pi} dv; \quad \mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]. \quad (155)$$

### Плотность потока энергии.

В соответствии с представленным равенством (155) вектор  $\mathbf{S}$  - определяет энергию, проходящую в единицу времени через единицу поверхности в направлении ортогональным векторам  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Иными словами  $|\mathbf{S}|$  - есть плотность потока энергии, а  $\mathbf{S}$  - вектор плотности потока энергии. Этот вектор называется вектором Умова-Пойнтинга.

Интерпретация  $\mathbf{S}$  как вектора плотности потока энергии имеет некоторый элемент произвола. Закон сохранения энергии приписывает физический смысл не самому вектору  $\mathbf{S}$ , а лишь интегралу от  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ , вычисленному по замкнутой поверхности  $\sigma$ . В общем случае из значения интеграла нельзя вывести однозначного заключения о распределении  $\mathbf{S}$ . Поэтому, в принципе, возможны и иные определения плотности потока энергии. Например, к определенному выше вектору Умова-Пойнтинга можно добавить ротор произвольного вектора, поскольку такое слагаемое не вносит вклада в поверхностный интеграл. Однако при осторожном применении определения вектора  $\mathbf{S}$ , в частности, для средних значений, конечных интервалов пространства и времени, никаких противоречий с экспериментальными результатами не возникает.

### Дифференциальная форма закона сохранения энергии.

На основании (146), (151) в дифференциальной форме закон сохранения энергии имеет следующий вид:

$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) = -\operatorname{div} \mathbf{S} - \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (156)$$

### Энергия поля в среде.

Для произвольной среды, рассмотренные выше понятия (энергия, вектор  $\mathbf{S}$ ) требуют специального исследования что не входит в предмет настоящего курса. Однако для примитивной однородной и изотропной среды вектор плотности потока энергии и энергия единицы объема электромагнитного поля определяются следующим образом:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]; \quad w = \frac{(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}{8\pi},$$

что может быть получено аналогично рассуждениям приведенным выше на основании системы уравнений Максвелла для среды.

В общем случае ситуация существенно усложняется и энергия поля может быть представлена в виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{4\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}).$$

### Диссипация энергии в проводнике.

Экспериментально установлено, что движущиеся заряды создают такое же электромагнитное поле, как и ток проводимости в проводнике. Следовательно, плотность тока  $\mathbf{j}$  в системе уравнений Максвелла, можно разделить на две части  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_c + \mathbf{j}_v$ , где  $\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}$  - плотность тока проводимости, а  $\mathbf{j}_v = \rho \mathbf{v}$  - плотность конвекционного тока. В этом случае закон сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{d\varepsilon_{part}}{dt} = -Q - \oint_{\sigma} (\mathbf{S} \cdot d\vec{\sigma}) - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{E^2 + B^2}{8\pi} \right) dv,$$

где  $Q$  представляет собой диссипацию энергии в проводнике из-за наличия сопротивления, называется джоулевым теплом и имеет вид:

$$Q = \int_V (\mathbf{j}_c \cdot \mathbf{E}) dv = \int_V \sigma E^2 dv.$$

Для непроводящей среды  $Q = 0$ .

### Примеры

Некоторые примеры на вычисление энергии поля  
шар заряженный с постоянной плотностью  
точечный заряд

## §17 Импульс электромагнитного поля

Введение понятия импульса электромагнитного поля может быть основано на уравнениях механики, в соответствии с которыми изменение импульса системы частиц, определяется суммарной силой, действующей на систему

$$\frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} = \mathbf{F}$$

В случае замкнутой системы заряженных частиц, силой действующей на частицы является сила Лоренца, поэтому для произвольной системы частиц имеем

$$\frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} = \mathbf{F} = \sum_{k=1}^N \left\{ q_k \mathbf{E}_k + \frac{q_k}{c} [\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}_k] \right\}. \quad (157)$$

Для непрерывно распределенного заряда внутри объема  $V$  последнее равенство имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} = \mathbf{F} = \int_V \left\{ \rho(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') + \frac{1}{c} [\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{B}(\mathbf{r}')] \right\} dv'. \quad (158)$$

В соотношении (158) выразим плотность заряда и плотность тока из системы уравнений Максвелла. Полученное выражение можно симметризовать с использованием закона электромагнитной индукции и закона отсутствия магнитных зарядов. В результате тождественных преобразований структура выражения (158) в проекциях на декартовы оси координат  $i = x, y, z$  может быть представлена в виде (детали преобразований можно найти в [4]):

$$\left( \frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} \right)_i = \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} dv - \left( \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dv \right)_i,$$

где  $\mathbf{f}$  - вектор, квадратичный по полю, структура, которого вытекает из тождественных преобразований на основании системы уравнений Максвелла. Интеграл от  $\operatorname{div} \mathbf{f}$  на основании теоремы Остроградского- Гаусса можно преобразовать к интегралу по поверхности, ограничивающей произвольный объем интегрирования. Для ограниченной системы зарядов и токов на бесконечно удаленной поверхности интегрирования (все пространство) величина вектора  $\mathbf{f}$  стремится к нулю и вклад данного слагаемого отсутствует. Таким образом, данные преобразования приводят к следующему выражению:

$$\frac{d\mathbf{p}_{part}}{dt} = - \frac{1}{4\pi c} \frac{d}{dt} \int_V [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] dv,$$

которое может быть проинтерпретировано как закон сохранения импульса в системе заряженные частицы-поле:

$$\frac{d}{dt} \left( \mathbf{p}_{part} + \int_V \mathbf{q} dv \right) = 0; \quad \mathbf{q} \equiv \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]}{4\pi c}.$$

Таким образом, величина  $\mathbf{q}$  определяет импульс единицы объема электромагнитного поля, а интеграл по объему поля от  $\mathbf{q}$  - импульс поля. Как видно импульс единицы объема поля связан с вектором Умова-Пойнтинга. В частности, в системе единиц Гаусса:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

При наличии среды, введение понятия импульса поля требует более детальных рассуждений. Отметим, что для однородной изотропной среды, рассуждения аналогичные представленным выше приводят к следующему результату для импульса единицы объема поля:

$$\mathbf{q} = \frac{[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]}{4\pi c}.$$

Также как и в механике для электромагнитного поля может быть введено понятие момента импульса. Так, для единицы объема поля момент импульса равен  $\mathbf{l} = [\mathbf{r} \times \mathbf{q}]$ .

### Примеры

Примеры на вычисление импульса поля

Квантовая теория света Эйнштейна (ее лучше отнести к СТО)

# Литература

- [1] *С.Р.де Гроот, Л.Г.Сатторп.* Электродинамика. М., Наука, 1982.
- [2] *А.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов.* Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М., Наука, 1978.
- [3] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Гидродинамика. М., Наука, 1986.
- [4] *В.Г.Левич.* Курс теоретической физики. Том 1 М., Наука, 1969.
- [5] *В. Карцев.* Приключения великих уравнений. М., Знание, 1986, 288 с.
- [6] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. т.6. М., Мир, 1966, 343с.
- [7] *Джексон.* Классическая электродинамика.
- [8] *Градитейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.
- [9] *Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский.* Квантовая теория волнового момента. Ленинград, Наука, 1975.
- [10] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.
- [11] *М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин.* Классическая электродинамика. М., Наука, 1988.

# Оглавление

§1	Введение. История возникновения и развития электродинамики . . . . .	1
§2	Экспериментальные данные, лежащие в основе электродинамики. Электростатика. . . . .	2
§3	Экспериментальные данные, лежащие в основе электродинамики. Магнитостатика. . . . .	8
§4	Закон электромагнитной индукции Фарадея. . . . .	12
§5	Ток смещения. Система уравнений Максвелла. . . . .	14
§6	Системы единиц измерения. . . . .	16
§7	Скалярный и векторный потенциалы. . . . .	18
§8	Электромагнитное поле в веществе. . . . .	20
§9	Поляризация среды. Дипольный момент. . . . .	22
§10	Магнитный момент. . . . .	24
§11	Параметризация средней плотности тока связанных зарядов в линейной электродинамике. . .	25
§12	Физический смысл слагаемых в $\langle \mathbf{j} + \mathbf{j}_{in} \rangle$ . . . . .	26
§13	Система уравнений Максвелла в среде. . . . .	29
§14	Фурье-преобразования системы уравнений Максвелла. . . . .	30
§15	Векторы Герца. . . . .	30
§16	Энергия электромагнитного поля . . . . .	33
§17	Импульс электромагнитного поля . . . . .	35