

Министерство общего и профессионального образования РФ  
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
Физический факультет  
Кафедра теоретической физики

---

ЗАПРЯГАЕВ С. А.

МАГНИТОСТАТИКА

Методические указания к практическим занятиям по курсу  
"ЭЛЕКТРОДИНАМИКА"  
для студентов 3-го курса дневного отделения

Работа выполнена при поддержке гранта VZ-010 Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF).

Воронеж  
2003

# 1 МАГНИТОСТАТИКА

## 1.1 Система уравнений Максвелла

Магнитостатика - это раздел электродинамики, в котором изучается частный случай электромагнитного поля, создаваемого постоянными во времени токами. Описание такого поля и передаваемого посредством этого поля силового взаимодействия токов основывается на частом случае системы уравнений Максвелла. Эта система уравнений может быть представлена как в дифференциальной, так и в интегральной формах.

### А. Дифференциальные уравнения:

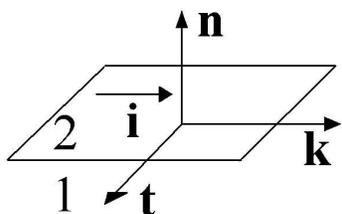
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}; \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  - вектор индукции,  $\mathbf{H}$  - вектор напряженности магнитного поля,  $\mathbf{M}$  - магнитный момент единицы объема,  $\mathbf{j}$  - плотность тока.

### Б. Интегральные уравнения:

$$\oint_S (\mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}) = 0; \quad \oint_L (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}) = \frac{4\pi}{c} I = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}). \quad (2)$$

Векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  удовлетворяют принципу суперпозиции.



В однородном изотропном магнетике  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , где  $\mu$  - магнитная проницаемость среды. На границе раздела двух сред нормальные и тангенциальные составляющие поля удовлетворяют соотношениям:

$$\text{Рис. 1:} \quad B_{2n} - B_{1n} = 0; \quad H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i. \quad (3)$$

Здесь  $i$  - плотность поверхностного тока  $\mathbf{i} = ik$ ,  $\mathbf{k}$  - единичный вектор. Если обозначить единичный вектор нормали к поверхности раздела  $\mathbf{n}$ , а единичный вектор касательный к поверхности (по направлению тангенциальной составляющей)  $\mathbf{t}$ , то так определенные векторы образуют правый базис  $[\mathbf{n} \times \mathbf{t}] = \mathbf{k}$ .

**Пример 1.1.1.** Вблизи границы раздела двух магнетиков  $\mu_1, \mu_2$  (рис. 1) магнитная индукция во втором магнетике равна  $\mathbf{B}_2$ . При

этом вектор индукции наклонен к вектору нормали границы под углом  $\alpha_2$ . Найти магнитную индукцию вблизи границы раздела внутри магнетика с проницаемостью  $\mu_1$ .

Величина искомого вектора индукции равна  $B_1 = \sqrt{B_{1n}^2 + B_{1t}^2}$  где  $B_{1n}$  - нормальная и  $B_{1t}$  - тангенциальная составляющие вектора индукции внутри магнетика  $\mu_1$ . На границе раздела, в соответствии с (3), выполняются равенства:

$$B_{1n} = B_{2n} = B_2 \cos \alpha_2;$$

$$B_{1t} = \mu_1 H_{1t} = \mu_1 H_{2t} = \mu_1 B_{2t} / \mu_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2} B_2 \sin \alpha_2.$$

В результате величина искомого вектора равна:

$$B_1 = B_2 \sqrt{\cos^2 \alpha_2 + \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \sin^2 \alpha_2}. \quad (4)$$

Угол между направлением нормали и направлением вектора индукции можно найти из выражения:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = B_{1t} / B_{1n} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha_2; \quad \alpha_1 = \operatorname{arctg} \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} \alpha_2 \right)$$

**Пример 1.1.2.** Можно ли создать в пространстве постоянный ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 f(r)$ , где  $\mathbf{j}_0$  - постоянный вектор,  $f(r)$  - произвольная функция,  $r$  - модуль радиуса-вектора?

В соответствии с системой уравнений (1), в случае постоянного тока плотность тока должна удовлетворять условию стационарности  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ . В связи с этим вычислим, чему равна  $\operatorname{div} \mathbf{j}$  в данном примере:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 \cdot \operatorname{grad} f(r) = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} (\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{r}) \neq 0. \quad (5)$$

Следовательно, создать такой постоянный ток в пространстве нельзя.

**Пример 1.1.3.** Определить распределение объемной плотности тока в пространстве, если напряженность магнитного поля тока имеет вид  $\mathbf{H} = f(\mathbf{r})[\vec{\mu} \times \mathbf{r}]$ , где  $f(\mathbf{r})$  - произвольная дифференцируемая функция, а  $\vec{\mu}$  - постоянный вектор. Определить, при какой функции  $f(\mathbf{r})$  плотность тока удовлетворяет условию стационарности?

На основании уравнений (1) находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \left\{ [\operatorname{grad} f \times [\vec{\mu} \times \mathbf{r}]] + f[\vec{\nabla} \times [\vec{\mu} \times \mathbf{r}]] \right\} = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left\{ \vec{\mu}(\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} f) - \mathbf{r}(\vec{\mu} \cdot \operatorname{grad} f) + f \vec{\mu} \operatorname{div} \mathbf{r} - f(\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{r} \right\} = \\ &= \frac{c}{4\pi} \left\{ \vec{\mu}(\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} f) - \mathbf{r}(\vec{\mu} \cdot \operatorname{grad} f) + 2f \vec{\mu} \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

В частном случае, если  $f$  зависит только от модуля радиуса вектора, то  $\operatorname{grad} f(r) = f'_r \mathbf{r}/r$ , в результате находим:

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \left\{ 2f \vec{\mu} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} [\mathbf{r} \times [\vec{\mu} \times \mathbf{r}]] \right\}. \quad (7)$$

Выражения (6),(7) удовлетворяют условию стационарности при любой  $f(\mathbf{r})$ , т.к  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0$ .

**Пример 1.1.4.** По бесконечному линейному проводнику протекает постоянный ток  $I$ . Определить магнитное поле, создаваемое этим током в любой точке пространства.

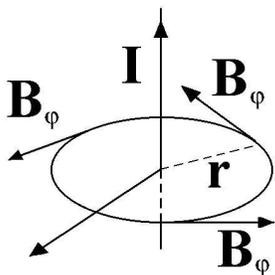


Рис. 2:

Из условий симметрии системы очевидно, что вектор индукции может быть направлен лишь по касательной к окружности, лежащей в плоскости ортогональной линии тока. Это вытекает из условия инвариантности физической системы относительно сдвига начала координат вдоль линии тока и вращения системы координат вокруг оси, совпадающей с линией тока. Кроме того, ясно, что на окружности произвольного радиуса  $r$  величина вектора индукции постоянна. В результате на основании (2) находим:

$$\oint_L (\mathbf{B} \, d\mathbf{l}) = \oint_r B_\varphi \, dl = B_\varphi \oint_r dl = B_\varphi 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I. \quad \rightarrow \quad B_\varphi = \frac{2I}{cr}. \quad (8)$$

**Комментарий:** соотношение (2) является в теории магнитостатического поля аналогом теоремы Гаусса в электростатике. Применение соотношения (2) целесообразно при условии, если интегральный член можно вычислить на основании условий симметрии системы.

**Пример 1.1.5.** *Внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$  параллельно его оси течет ток с объемной плотностью зависящей только от модуля радиуса вектора цилиндрической системы координат  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$ . Найти напряженность поля внутри и снаружи цилиндра.*

Представив цилиндр с током как совокупность линейных проводников, на основании принципа суперпозиции и, повторяя рассуждения, приведенные в примере 1.1.4, получим, что вектор напряженности лежит в плоскости ортогональной оси цилиндра и направлен по касательной к окружности с центром на оси цилиндра.

Выберем в формуле (2) в качестве контура интегрирования окружность радиуса  $r$ , лежащую в плоскости ортогональной оси цилиндра (пусть это плоскость  $x, y$ ), тогда

$$\oint_L (\mathbf{H} d\mathbf{l}) = \oint_r H dl = H_\varphi \int_r dl = H_\varphi \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} \int_S (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}). \quad (9)$$

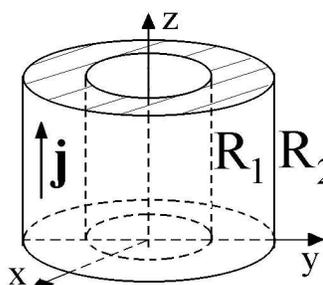


Рис. 3:

Здесь  $H_\varphi$ -составляющая поля в направлении положительного изменения угла цилиндрической системы координат  $\varphi$ , а  $S$  — круг, для которого окружность радиуса  $r$  является границей. Плоскость круга ортогональна оси цилиндра. Так как плотность тока  $\mathbf{j} = j(r)\mathbf{k}$ , где  $\mathbf{k}$  - единичный вектор, направленный вдоль оси цилиндра и  $d\mathbf{s} = \mathbf{k}ds = \mathbf{k}rdrd\varphi$ , ток через круг радиуса  $r$

равен:

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j} d\mathbf{s} &= \int j(r') d\mathbf{s} = \int_0^r \int_0^{2\pi} j(r')r' dr' d\varphi = 2\pi \int_0^r j(r')r' dr' = \\ &= \begin{cases} 2\pi \int_0^R j(r')r' dr', & \text{если } r \geq R; \\ 2\pi \int_0^r j(r')r' dr', & \text{если } r < R. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

В результате находим окончательно для напряженности поля:

$$H_r = H_\varphi = 0; \quad H_\varphi = \begin{cases} 4\pi(\int_0^R j(r')r' dr')/rc, & \text{если } r \geq R; \\ 4\pi(\int_0^r j(r')r' dr')/rc, & \text{если } r < R. \end{cases} \quad (11)$$

**Пример 1.1.6.** *В пространстве между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$ , ( $R_1 < R_2$ ) течет ток плотности  $\mathbf{j}(r)$  параллельно оси цилиндров ( $r$ - модуль*

радиуса- вектора цилиндрической системы координат). Найти напряженность магнитного поля в любой точке пространства.

Условия симметрии задачи аналогичны условиям симметрии в примерах 1.1.4, 1.1.5, то есть для окружности радиуса  $r$ , лежащей в плоскости  $x, y$ :

$$\oint_r \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_\varphi \cdot 2\pi r. \quad (12)$$

Соответственно для силы тока  $I$  находим:

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} = \begin{cases} 0, & \text{если } r < R_1; \\ 2\pi(\int_{R_1}^r j(r')r' dr'), & \text{если } R_1 < r < R_2; \\ 2\pi(\int_{R_1}^{R_2} j(r')r' dr'), & \text{если } r > R_2. \end{cases} \quad (13)$$

На основании (2), (12), (13) получаем окончательно величины полей в различных точках пространства. При этом  $H_r = H_z = 0$ .

**Пример 1.1.7.** Квадратная рамка со стороной  $a$  находится в одной плоскости с прямолинейным током  $I$ . На каком расстоянии от тока расположена ближайшая сторона рамки, если поток магнитного поля через поверхность рамки равен  $\phi_0$  (задача N198 в [1])

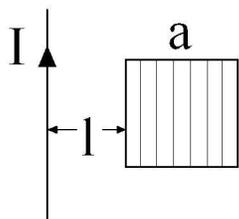


Рис. 4:

Вектор индукции магнитного поля в любой точке рамки ортогонален плоскости рамки и равен  $B_\varphi = 2I/cr$  (см. пример 1.1.4), где  $r$  - кратчайшее расстояние от произвольной точки внутри рамки до линии тока. По определению поток вектора индукции через рамку определяется поверхностным интегралом по площади рамки:

$$\phi_0 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_l^{l+a} B(y) dy \int_{-a/2}^{a/2} dz = \frac{2Ia}{c} \ln \frac{l+a}{l}. \quad (14)$$

Решая данное уравнение относительно  $l$ , находим:

$$l = a \left\{ \exp \left[ \frac{\phi_0 c}{2Ia} \right] - 1 \right\}^{-1}. \quad (15)$$

**Пример 1.1.8.** Ток  $I$  течет по проводнику, намотанному плотно по винтовой линии на поверхность бесконечного цилиндра (соленоид). На единицу длины соленоида приходится  $n$  витков проводника. Опыт показывает, что для бесконечно длинного соленоида поле снаружи отсутствует. Определить поле внутри соленоида.

Из соображений симметрии ясно, что вектор индукции  $\mathbf{B}$  направлен вдоль оси соленоида. Выберем контур интегрирования в теореме Ампера (2) в виде прямоугольника, две стороны которого параллельны оси соленоида и расположены внутри и вне соленоида соответственно. При вычислении циркуляции вектора индукции по внешней стороне контура и по линиям, ортогональным оси соленоида, получим результат, равный 0. Таким образом, ненулевой вклад в циркуляцию вектора индукции появляется лишь при интегрировании по внутренней стороне. Обозначим длину этой стороны прямоугольника через  $l$ . В результате:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \cdot l = 4\pi n l \frac{I}{c} \quad \rightarrow \quad B = 4\pi n \frac{I}{c}. \quad (16)$$

**Пример 1.1.9.** *Вычислить магнитное поле, создаваемое токовым торроидом (токовый торроид- металлический провод, плотно намотанный на каркас, имеющий форму тора, по которому протекает ток  $I$ ). Полное число витков в торроиде  $n$ .*

Из соображений симметрии ясно, что вектор индукции отличен от нуля во внутренней части тора. При этом в каждой точке пространства вектор  $\mathbf{B}$  направлен по касательной к окружности с центром на оси тора. Поэтому для использования теоремы (2) в качестве контура интегрирования следует взять окружность с центром на оси тора, лежащую ортогонально оси. При этом если окружность расположена внутри торроида, то она охватывает ток силой  $nI$ . В результате:

$$B \cdot 2\pi r = 4\pi n \frac{I}{c}, \quad B = 2n \frac{I}{cr}. \quad (17)$$

Из сравнения (17) с (8) видно, что внутри торроида магнитное поле совпадает с полем прямолинейного бесконечного тока силы  $nI$ , текущего вдоль оси. Кроме того, устремив  $n$  и радиус тора к бесконечности (при постоянном сечении тора) получим выражение, найденное в предыдущем примере для магнитного поля бесконечно длинного соленоида.

Если выбранный круговой контур лежит вне торроида, то токов он не охватывает, поэтому для такого контура  $B \cdot 2\pi r = 0$  и это означает, что поле вне торроида отсутствует.

**Комментарий:** *Представленное решение предполагает, что линии*

тока лежат строго в меридианальных плоскостях. У реальной системы это не так, что приводит к возникновению тока вокруг оси торроида. Эта составляющая тока приводит к возникновению поля, аналогичного полю кругового тока.

**Пример 1.1.10.** Вычислить магнитное поле бесконечной проводящей плоскости, по которой в одном направлении течет равномерно распределенный ток с линейной плотностью  $i$  (линейная плотность тока - это ток, приходящийся на единицу длины).

Разобъем мысленно плоскость с током на тонкие нити с током. Рассматривая пару таких нитей, симметричных относительно некоторой линии параллельной направлению тока, в соответствии с принципом суперпозиции можно установить, что результирующее поле  $\mathbf{B}$  направлено параллельно плоскости с током и лежит в плоскости ортогональной плоскости тока.

Учитывая симметрию системы, выберем квадратный контур  $L$  со стороной  $l$  параллельной  $\mathbf{B}$ , плоскость которого ортогональна плоскости с током и пересекает ее. В результате получим:

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2Bl = 4\pi i \frac{l}{c}; \quad B = 2\pi \frac{i}{c}. \quad (18)$$

**Комментарий:** 1) Из (18) следует, что магнитное поле с обеих сторон плоскости однородно и противоположно направлено. Этот результат справедлив и для ограниченной плоскости с током, но лишь для точек вблизи плоскости удаленных от ее границ.

2) Относительная легкость, с которой проведен расчет полей в приведенных выше примерах на основании (2), оказалась возможной благодаря наличию симметрий в системах. В общем случае возможность применения этой теоремы ограничена.

**Задание на дом:** Решить задачи: 2.1-2.3. (стр. 25);

## 1.2 Векторный потенциал. Закон Био-Саввара-Лапласа.

Широко применяемые способы описания магнитостатического поля основаны на использовании векторного потенциала  $\mathbf{A}$  и закона Био-Саввара-Лапласа, который естественно вытекает из определений для

векторного потенциала. Вектор векторного потенциала  $\mathbf{A}$  определяется соотношением:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (19)$$

Вектор  $\mathbf{A}$  определен не однозначно, так как индукция  $\mathbf{B}$  не меняется, если выполнить градиентное преобразование потенциала:  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi$ , где  $\chi$  - произвольная функция. Чтобы ограничить произвол в выборе векторного потенциала, обычно на  $\mathbf{A}$  накладывают дополнительное условие, например:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (20)$$

В магнитоизотропной, неоднородной среде  $\mathbf{A}$ , с учетом (20), удовлетворяет уравнению:

$$\left[ \text{rot } \mathbf{A} \times \text{grad } \frac{1}{\mu} \right] + \frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (21)$$

Здесь  $\mu$  - магнитная проницаемость среды  $\mu = \mu(\mathbf{r})$ . В однородной среде  $\mu = \text{const}$  и уравнение для векторного потенциала имеет вид неоднородного уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}. \quad (22)$$

На границе раздела двух сред для векторного потенциала и его производных выполняются следующие граничные условия:

$$\frac{1}{\mu_1} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} \right)_1 - \frac{1}{\mu_2} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} \right)_2 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}, \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2, \quad (24)$$

где  $\mathbf{i}$  поверхностная плотность тока.

Решение уравнения (22), при отсутствии граничных условий, имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (25)$$

С учетом (19) на основании (25) для вектора  $\mathbf{B}$  находим:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu}{c} \int \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (26)$$

В случае линейного тока  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  могут быть вычислены из уравнений (25), (26) с заменой  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') dv' \Leftrightarrow I d\mathbf{l}'$ , где элемент  $d\mathbf{l}'$  направлен по току. В

частности, из (26) получаем:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{c} \int \frac{[d\mathbf{l}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (27)$$

Выражение (27) в соответствии с принципом суперпозиции эквивалентно закону Био-Саввара-Лапласа:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu I}{c} \frac{[d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (28)$$

где  $\mathbf{R}$  - расстояние от элемента тока  $d\mathbf{l}$  до точки, в которой определяется значение поля.

**Пример 1.2.1.** *Бесконечный цилиндр радиуса  $R$  с магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ , равномерно заряженный с объемной плотностью  $\rho = const$ , вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Найти векторный потенциал внутри и снаружи цилиндра. (См. задачу 219 в [1])*

Вращение цилиндра создает в пространстве ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = \rho [\mathbf{r} \times \vec{\omega}]$ . Таким образом, в цилиндрической системе координат:

$$j_r = j_z = 0; \quad j_\varphi = \rho \omega r \quad r \leq R, \quad j_\varphi = 0, \quad r > R. \quad (29)$$

Из условий симметрии ясно, что в цилиндрической системе  $A_r = A_z = 0$ , а  $A_\varphi = A_\varphi(r)$ .

В цилиндрической системе координат компоненты векторного лапласиана  $\Delta \mathbf{A}$  имеют вид [3]:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{A} |_{r=} &= \Delta A_r - \frac{1}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; & \Delta \mathbf{A} |_{\varphi=} &= \Delta A_\varphi - \frac{1}{r^2} A_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\ \Delta \mathbf{A} |_{z=} &= \Delta A_z. \end{aligned} \quad (30)$$

Обозначим значения векторного потенциал во внутренней и внешней областях цилиндра следующим образом:

$$A_\varphi(r) = A_1, \quad r \leq R; \quad A_\varphi(r) = A_2, \quad r > R. \quad (31)$$

В результате на основании (22) находим:

$$\Delta A_{1\varphi} - \frac{1}{r^2} A_{1\varphi} = -\frac{4\pi}{c} \rho \omega r; \quad \Delta A_{2\varphi} - \frac{1}{r^2} A_{2\varphi} = 0. \quad (32)$$

Подставляя явный вид оператора  $\Delta$  в цилиндрической системе координат, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2 A_{1\varphi}}{dr^2} + r \frac{dA_{1\varphi}}{dr} - A_{1\varphi} &= -\frac{4\pi}{c} \rho \omega r^3, \\ r^2 \frac{d^2 A_{2\varphi}}{dr^2} + r \frac{dA_{2\varphi}}{dr} - A_{2\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Уравнения (33) должны быть решены с учетом граничных условий:

$$A_{1\varphi}(R) = A_{2\varphi}(R); \quad \left. \frac{dA_{1\varphi}}{dr} \right|_{r=R} = \left. \frac{dA_{2\varphi}}{dr} \right|_{r=R}. \quad (34)$$

Общее решение уравнений (33) необходимо искать в виде:  $A_{i\varphi} = \text{const} \cdot r^s$ . В результате для  $s$  имеем алгебраическое уравнение второго порядка  $s(s - 1) + s - 1 = 0$ , решение которого есть:  $s_1 = 1, s_2 = -1$ . Таким образом, общее решение однородных уравнений (33) имеет вид:

$$A_{i\varphi} = C_{1i}r + C_{2i}/r. \quad (35)$$

Частное решение неоднородного уравнения (33) есть:

$$A_{\varphi} = -\frac{\pi}{2c} \rho \omega r^3. \quad (36)$$

В результате, с учетом (34) получаем окончательно:

$$\begin{aligned} A_{1r} = A_{1z} = 0; \quad A_{1\varphi} &= \frac{\pi}{c} \rho \omega r(R^2 - r^2/2), \\ A_{2r} = A_{2z} = 0; \quad A_{2\varphi} &= \frac{\pi}{2c} \rho \omega R^4/r. \end{aligned} \quad (37)$$

Вычисленное значение векторного потенциала легко может быть использовано для нахождения вектора магнитной индукции, так как  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . В данном примере следует обратить внимание на то, как определяется оператор Лапласа от компонент вектора в криволинейной системе координат (подробнее см. в [3],[5]).

**Пример 1.2.2.** Заряд  $Q$  распределен по объему шара радиуса  $R$  с объемной плотностью  $\rho = \rho_0 r^n$ . Здесь  $\rho_0$  – размерная константа,  $r$  – модуль радиус-вектора, а  $n$  – произвольное число. Найти индукцию магнитного поля в центре шара, который вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ .

Поместим начало координат в центр шара, направив ось  $Z$  вдоль вектора  $\vec{\omega}$ . В соответствии с (26) вектор индукции в центре шара имеет вид:

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(r')]}{r'^3} dv' = \frac{1}{c} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{[\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(r')]}{r'^3} r'^2 dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (38)$$

Объемная плотность тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}') = \rho \mathbf{v}(\mathbf{r}') = \rho [\vec{\omega} \times \mathbf{r}']$ . В результате:

$$\mathbf{B}(0) = \frac{1}{c} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r') \frac{r'^2 \vec{\omega} - \omega z' \mathbf{r}'}{r'^3} dv' \quad (39)$$

Интегрирование в (39) подынтегральных функций, содержащих произведение декартовых координат  $x'z'$  и  $y'z'$ , являющихся нечетными функциями по своим координатам, в симметричных пределах дает 0. Оставшиеся слагаемые определяют значение вектора  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(0) &= \frac{\vec{\omega}}{c} \int \rho(r') \frac{x'^2 + y'^2}{r'^3} dv' = \frac{\vec{\omega}}{c} \rho_0 \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r'^{n+1} \sin^2 \theta' r' dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi' = \\ &= \frac{8\pi}{3(n+2)} \frac{\rho_0}{cR} R^{n+2} \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (40)$$

**Пример 1.2.3.** Найти поле в любой точке пространства, создаваемое круговым линейным током силы  $I$ , радиуса  $R$ . Плотность тока в такой системе можно представить в виде (ток расположен в плоскости  $x$ - $y$ ):

$$j_\varphi = I \delta(\cos \theta') \frac{\delta(r' - R)}{R}. \quad (41)$$

Здесь  $r \theta \varphi$  – переменные сферической системы координат.

Нетрудно убедиться, что формула (41) действительно соответствует круговому току силы  $I$ . Для этого проинтегрируем плотность тока по сечению, ортогональному току. Если выбрать  $ds' = r' \sin \theta' d\theta' dr'$ , то после замены переменной  $\cos \theta' = x$  получим:

$$I = \int_S j_\varphi' ds' = \frac{I}{R} \int_{-1}^1 \delta(x) dx \int_0^\infty \delta(r' - R) r' dr' = I.$$

В силу симметрии системы, т.к.  $\mathbf{j}$  имеет лишь  $\varphi$ -составляющую, отличную от нуля, то и  $\mathbf{A}$  имеет лишь одну составляющую, отличную от нуля –  $A_\varphi$ . Однако  $A_\varphi$  нельзя вычислить непосредственно, подставляя  $j_\varphi$  в (25),

так как векторное уравнение Пуассона (22) сводится к трем независимым скалярным уравнениям лишь в декартовых координатах. В криволинейных ортогональных координатах дифференциальный оператор связывает все составляющие вектора (см. [3], [5]). Например, в цилиндрической системе координат компоненты вектора  $\Delta \mathbf{A}$  представлены формулами (30), а в сферической системе координат компоненты вектора  $\Delta \mathbf{A}$  приведены в упражнении 2.9 на стр 26. Поэтому выполним вычисления для декартовых компонент вектора  $\mathbf{A}$ .

Составляющие плотности тока в декартовых координатах имеют вид:

$$j_x = -j_\varphi \sin \varphi'; \quad j_y = -j_\varphi \cos \varphi', \quad (42)$$

где величина плотности тока  $j_\varphi$  определена выражением (41).

В силу цилиндрической симметрии задачи при вычислении векторного потенциала можно выбрать точку наблюдения лежащей в плоскости  $xz$ , (т.е.  $\varphi = 0$ ). Это не уменьшит общности решения. В этом случае  $x$ -составляющая векторного потенциала  $A_x$  равна нулю, так как  $A_x \sim j_x = j_\varphi \sin 0 = 0$  и остается лишь  $y$ -составляющая векторного потенциала. В результате:

$$A_y(r, \theta) = \frac{I}{cR} \int \frac{\cos \varphi'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta(\cos \theta') \delta(r' - R) r'^2 dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (43)$$

По определению модуль разности векторов  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  равен:

$$\sqrt{r^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + r'^2} = \sqrt{r^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi') + r'^2}. \quad (44)$$

Подставляя (44) в (43), после интегрирования по  $d\theta'$  и  $dr'$  находим:

$$A_y(r, \theta) = \frac{IR}{c} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{\sqrt{r^2 - 2rR \sin \theta \cos \varphi' + R^2}}. \quad (45)$$

Данный интеграл выражается через полные эллиптические интегралы  $K(x)$  и  $E(x)$ [6]:

$$K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha}}; \quad E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \alpha} d\alpha. \quad (46)$$

Окончательно получим:

$$A_y(r, \theta) = \frac{4IR}{c\sqrt{R^2 + 2rR \sin \theta + r^2}} \left[ \frac{2 - x^2}{x^2} K(x) - \frac{2}{x^2} E(x) \right], \quad (47)$$

где аргумент эллиптических интегралов определяется выражением:

$$x \equiv \sqrt{\frac{4rR \sin \theta}{R^2 + r^2 + 2rR \sin \theta}}. \quad (48)$$

В силу цилиндрической симметрии имеем  $A_\varphi = A_y$ . Составляющие вектора магнитной индукции определяются из:

$$B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi); \quad B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi); \quad B_\varphi = 0. \quad (49)$$

Решение этой же задачи можно найти, используя разложения модуля разности векторов по сферическим функциям. Рассматривая, аналогично предыдущему случаю, плоскость  $x - z$  ( $\varphi = 0$ ), для  $A_y$  компоненты векторного потенциала находим:

$$A_y = \operatorname{Re} \frac{4\pi I}{cR} \sum_{l,m} \frac{Y_{l,m}(\theta, 0)}{2l+1} \int \frac{r'_<}{r'^{l+1}} \delta(\cos \theta') \delta(r' - R) e^{i\varphi'} Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') dv', \quad (50)$$

здесь  $r_>, r_<$  большая, меньшая из двух переменных  $r, R$  и интегрирование проводится по всему пространству в переменных сферической системы координат. Наличие множителя  $\exp(i\varphi')$  в подынтегральном выражении в (50) означает, что в сумме по  $m$  отличны от нуля лишь слагаемые с  $m = 1$ . Действительно под интегралом по  $\varphi'$  появится выражение  $\exp(1 - m)\varphi'$ . Интеграл от данной функции в пределах от 0 до  $2\pi$  равен  $2\pi$  при  $m = 1$  и равен нулю во всех остальных случаях. Выполняя интегрирования в (50), находим:

$$A_y = \frac{8\pi^2 IR}{c} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \frac{r'_<}{r'^{l+1}} Y_{l,1}(\theta, 0) Y_{l,1}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right). \quad (51)$$

Используя явный вид сферической функции  $Y_{l,1}^*\left(\frac{\pi}{2}, \varphi'\right)$  [6], получаем:

$$Y_{l,1}^*\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} P_l^1(0). \quad (52)$$

Здесь  $P_l^1$ - присоединенный полином Лежандра [6]. С учетом свойств присоединенных полиномов Лежандра [6] находим:

$$A_\varphi = -\frac{\pi IR}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{2^n (n+1)!} \cdot \frac{r'_<^{2n+1}}{r'^{2n+2}} \cdot P_{2n+1}^1(\cos \theta), \quad (53)$$

где  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3) \cdot (2n-1)$ ,  $r_<, r_>$  - меньшая - большая переменная из радиальной переменной  $r$  и радиуса окружности с током  $R$ .

Выражение (53) существенно проще для вычислений значения поля, чем результат, представленный формулой (47).

**Задание на дом:** Решить задачи 2.4 - 2.8 на стр. 25.

### 1.3 Поле системы замкнутых токов на больших расстояниях. Магнитный момент системы токов.

На больших расстояниях от области, где протекают замкнутые токи, векторный потенциал и индукция магнитного поля принимают вид:

$$\mathbf{A} \approx \frac{[\vec{\mu} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \approx \frac{3(\vec{\mu} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - \vec{\mu}}{r^3}, \quad (54)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ ,  $\mathbf{r}$  - радиус вектор точки наблюдения в системе координат, в которой определена система токов  $\mathbf{j}$ , а  $\vec{\mu}$  - магнитный момент системы замкнутых токов:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv \Leftrightarrow \frac{I}{2c} \oint_L [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}]. \quad (55)$$

Для замкнутого линейного тока  $I$  на основании (55) магнитный момент равен:

$$\vec{\mu} = \frac{IS}{c} \mathbf{n}, \quad S = \int_S ds. \quad (56)$$

Интеграл в (56) вычисляется по произвольной поверхности  $S$ , границей которой является линейный ток  $I$ . Если ток лежит в плоскости, то направление  $\mathbf{n}$  связано с направлением тока  $I$  правилом "правого винта".

**Пример 1.3.1.** Установить связь магнитного момента с механическим для заряженной частицы массы  $m$ , заряда  $q$ , движущейся по замкнутой траектории.

Механический момент  $\mathbf{l}$  или момент импульса определяется в классической механике как вектор следующего вида:  $\mathbf{l} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]$ , где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор, а  $\mathbf{p}$  - импульс частицы. Подставим в (55) величину плотности тока точечной заряженной частицы  $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)$ . Здесь  $\mathbf{v}$  - скорость движения, а  $\mathbf{r}_q$  - радиус-вектор положения заряда в пространстве. В результате:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{v}q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q)] dv = \frac{q}{2mc} [\mathbf{r}_q \times \mathbf{p}] = \frac{q}{2mc} \mathbf{l}. \quad (57)$$

Данное соотношение выполняется и для системы  $N$  частиц с одинаковыми зарядами и массами:

$$\mathbf{M} = \frac{q}{2mc} \mathbf{L}; \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^N \vec{\mu}; \quad \mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}.$$

**Пример 1.3.2.** Доказать, что для замкнутых токов определение магнитного момента не зависит от выбора начала координат.

Определения магнитного момента системы замкнутых токов в системах координат  $S$  и  $S'$  следующие:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv; \quad \vec{\mu}' = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}] dv'. \quad (58)$$

Пусть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}$ , с учетом (58) получим:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \times \mathbf{j}] dv = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv + \frac{1}{2c} [\mathbf{a} \times \int_V \mathbf{j} dv]. \quad (59)$$

Последнее слагаемое в (59) обращается в ноль в силу

$$\int_V \mathbf{j} dv = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \oint I_{L_i} d\mathbf{l} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N I \oint_{L_i} d\mathbf{l} = 0.$$

Таким образом,  $\vec{\mu} = \vec{\mu}'$  и определение магнитного момента не зависит от выбора начала отсчета системы координат.

**Пример 1.3.3.** В сферических координатах компоненты вектора объемной плотности тока в одном из возбужденных состояний атома водорода равны:

$$j_r = j_\theta = 0 \quad j_\varphi = \frac{e\hbar}{38\pi m a_0^7} r^3 \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right) \sin\theta \cos^2\varphi, \quad (60)$$

где  $a$  - боровский радиус,  $\hbar$  - постоянная Планка,  $m$  и  $e$  - масса и заряд электрона. Вычислить магнитный момент такого тока.

По определению (55) магнитный момент тока равен:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_V [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] dv = \frac{1}{2c} \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_\theta & \mathbf{a}_\varphi \\ j_r & j_\theta & j_\varphi \\ r_r & r_\theta & r_\varphi \end{bmatrix} dv, \quad (61)$$

где  $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\varphi$  - единичные векторы сферической системы координат,  $j_r, j_\theta, j_\varphi$  - компоненты плотности тока в сферической системе координат,  $r_r, r_\theta, r_\varphi$

-компоненты радиус-вектора в сферической системе координат. Таким образом, получаем:

$$\vec{\mu} = -\frac{1}{2c} \int_V \mathbf{a}_\theta r j_\varphi dv. \quad (62)$$

Интегрирование в (62), включающее все пространство, удобно выполнить в сферической системе координат, в которой  $dv = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ . При этом следует иметь в виду, что базис сферической системы координат меняется от точки к точке, поэтому запишем  $\mathbf{a}_\theta$  в декартовой системе координат:

$$\mathbf{a}_\theta = \mathbf{i} \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{j} \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{k} \sin \theta, \quad (63)$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  -базис декартовой системы координат. При интегрировании (62) по углу  $\varphi$  вклад слагаемых при единичных векторах  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  равен нулю, так как интегрируется периодическая функция на полном периоде. В результате:

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2c3^8\pi m a^7} \int_0^\infty r^6 \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right) dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \mathbf{k} = \frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{k}. \quad (64)$$

**Пример 1.3.4.** Согласно классической модели, электрон заряда  $e$  и массы  $m$  представляет собой однородно заряженный шар радиуса  $r_0 = e^2/mc^2$ . Здесь  $c$  – скорость света. Рассматривая магнитный спиновый момент как результат вращения электрона вокруг своей оси симметрии, определить с какой угловой скоростью должен вращаться электрон, чтобы его магнитный момент был бы равен экспериментально измеряемой величине  $\mu = e\hbar/2mc$ . Какова при этом будет линейная скорость точек электрона, лежащих на его диаметре?

Вычислим магнитный момент шара, заряженного с постоянной объемной плотностью, который вращается с угловой скоростью  $\omega$ . Из-за вращения шара произвольная точка  $\mathbf{r}$  шара движется с линейной скоростью  $v_\varphi = r \sin \theta \cdot \omega$ . Таким образом, возникает перенос заряда с плотностью тока  $j_\varphi = \rho \omega r \sin \theta$ . Рассуждения, аналогичные тем, что были выполнены в примере 1.3.3 для магнитного момента шара, дают:

$$\vec{\mu} = \left( \frac{1}{2c} \int_V r j_\varphi \sin \theta dv \right) \mathbf{k},$$

здесь  $V$  – объем шара. Таким образом,

$$\mu = \frac{\rho \omega}{2c} \int_0^{r_0} r^4 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{5} \frac{\omega e r_0^2}{c}. \quad (65)$$

По условию задачи вычисленный магнитный момент должен быть равен экспериментально измеренному значению:

$$\frac{1}{5} \frac{\omega e r_0^2}{c} = \frac{e \hbar}{2 m c}. \quad (66)$$

Отсюда можно найти величину угловой скорости, с которой должен вращаться электрон, чтобы возникший из-за вращения ток привел к экспериментально измеренному значению магнитного момента электрона:

$$\omega = \frac{5 \hbar}{2 m r_0^2} = \frac{5 m c^2}{2 \hbar} \alpha^{-2}, \quad (67)$$

где  $\alpha = e^2 / \hbar c \approx 1/137$  - постоянная тонкой структуры. Подставляя численные значения фундаментальных констант, находим  $\omega \approx 10^{25}$  сек<sup>-1</sup>. Так как классический радиус электрона  $r_0 = e^2 / m c^2 \approx 10^{-13}$  см, линейная скорость движения точек электрона, лежащих на его диаметре, будет иметь порядок величины  $v = \omega r \approx 10^{12}$  см/сек, что на два порядка больше скорости света. Таким образом, данная модель не может рассматриваться в качестве адекватной модели при изучении спинового магнитного момента

**Пример 1.3.5.** *Линейный ток  $I$  протекает по проводнику в форме половины окружности, замкнутой на три стороны прямоугольника, длины которых равны,  $R, 2R$  и  $R$ , соответственно. Сторона  $2R$  параллельна диаметру основания полуокружности. Определить поле на больших расстояниях от тока.*

На основании (54) индукция магнитного поля определяется магнитным моментом тока. Для плоского тока, в соответствии с (56), вектор магнитного момента равен  $\vec{\mu} = I S \cdot \mathbf{n} / c$ , где  $S$  - площадь фигуры, ограниченной рассматриваемым током,  $\mathbf{n}$  - нормаль к плоскости, направленная в сторону так, чтобы выполнялось условие - при наблюдении против направления нормали ток направлен против часовой стрелки (это известно в классической электродинамике как правило "буравчика"). В данном примере :

$$S = 2R^2 + \pi R^2 / 2 = \frac{\pi R^2}{2} \left[ 1 + \frac{4}{\pi} \right]. \quad (68)$$

Следовательно

$$\mathbf{B} = \frac{3(\vec{\mu} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{n}' - \vec{\mu}}{r^3} = \frac{I S}{c} \frac{3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}') \mathbf{n}' - \mathbf{n}}{r^3}, \quad (69)$$

где  $\mathbf{n}'$  - единичный вектор в направлении на точку наблюдения из выбранного начала координат, совпадающего с центром полуокружности.

**Задание на дом:** Решить задачи 2.9 на стр. 26, 2.13 - 2.17 на стр. 27.

#### 1.4 Энергия и силы в магнитном поле. Энергия тока во внешнем поле.

Полная энергия магнитного поля в объеме  $V$  определяется выражением:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv. \quad (70)$$

Здесь  $\mathbf{B}$ - индукция, а  $\mathbf{H}$ - напряженность магнитного поля. Интегрирование в (70) осуществляется по всему пространству, где есть поле. В частном случае объемного тока, текущего в ограниченной области пространства  $V$ , энергия магнитного поля системы может быть представлена в виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dv. \quad (71)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  -векторный потенциал поля, создаваемого током  $\mathbf{j}$ .

Для системы  $N$  штук проводников:

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^N W_{kk} + \sum_{k,n=1;k < n}^N W_{kn}, \quad (72)$$

где

$$W_{kk} = \frac{1}{2c} \int_{V_k} (\mathbf{j}_k \cdot \mathbf{A}_k) dv, \quad (73)$$

-собственная магнитная энергия " $k$ "-го проводника объема  $V_k$ , а  $W_{kn}$ -энергия взаимодействия " $k$ "-го и " $n$ "-го проводников.

$$W_{kn} = \frac{1}{2c} \int_{V_k} (\mathbf{j}_k \cdot \mathbf{A}_n) dv + \frac{1}{2c} \int_{V_n} (\mathbf{j}_n \cdot \mathbf{A}_k) dv. \quad (74)$$

Интегрирование проводится по объему проводников. Интегралы в (74) одинаковы, поэтому:

$$W_{kn} = \frac{1}{c^2} \int_{V_k} \int_{V_n} \frac{(\mathbf{j}_k(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_n(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' \leftrightarrow \frac{I_k I_n}{c^2} \oint_{L_k} \oint_{L_n} \frac{(d\mathbf{l}_k \cdot d\mathbf{l}_n)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (75)$$

Собственную энергию и энергию взаимодействия представляют в виде:

$$W_{kk} = \frac{I_k^2}{2c^2} L_{kk}, \quad W_{kn} = \frac{I_k I_n}{c^2} L_{kn}, \quad (76)$$

где  $L_{kk} \equiv L_k$  - называется коэффициент самоиндукции, а  $L_{kn}$ - коэффициенты взаимной индукции.

Для системы токов, находящихся во внешнем слабо неоднородном поле,

$$\varepsilon = \frac{1}{c} \int_V (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{R})) dv \approx (\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}) + \dots \quad (77)$$

Сила действующая в магнитном поле на элемент  $d\mathbf{l}$  с током  $I$  вычисляется с использованием закона Ампера:

$$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} [d\mathbf{l} \times \mathbf{B}]. \quad (78)$$

Для нахождения силы, действующей на проводник конечной длины, необходимо проинтегрировать выражение (78) по линии проводника. Для точечного заряда выражение (78) имеет вид:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Для объемного тока плотности  $\mathbf{j}$  в объеме  $dv$

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] dv.$$

Силы в магнитном поле могут быть вычислены также с использованием тензора натяжений Максвелла  $M_{ki}$ . Так, для проекции силы  $F_i$  на декартову ось "i" имеем:

$$F_i = \oint_S \sum_{k=1}^3 M_{ki} n_k ds, \quad M_{ki} = \frac{1}{8\pi} [B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} B^2], \quad i \in 1, 2, 3. \quad (79)$$

Здесь  $n_k$  проекции вектора нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности  $S$  на декартовы оси, а  $S$  – поверхность тела, для которого вычисляется сила действия со стороны магнитного поля индукции  $\mathbf{B}$ .  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера.

**Пример 1.4.1.** Доказать, что вид формулы (71) не изменится в результате градиентных преобразований векторного потенциала  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathbf{grad}\chi$ .

По определению:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}') dv = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{grad}\chi)) dv = \\ &= \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{grad}\chi) dv = \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2c} \int_V \text{div}(\chi\mathbf{j}) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2c} \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dv - \frac{1}{2c} \oint_S \chi (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}).$$

Для ограниченных токов нормальная составляющая тока равна нулю на поверхности  $S$ , ограничивающей систему токов. Таким образом, поверхностный интеграл в последнем выражении равен нулю, и следовательно, инвариантность формулы (71) относительно градиентных преобразований доказана.

**Пример 1.4.2.** Шар радиуса  $R$ , равномерно заряженный с объемной плотностью  $\rho$ , вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Вычислить энергию магнитного поля шара (см. задачу 221 в [1]).

Решением задачи о поле шара являются следующие выражения для точек, лежащих внутри шара ( $r \leq R$ ):

$$B_r = \beta \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right) \cos \theta, \quad B_\theta = \beta \left( \frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3} \right) \sin \theta, \quad B_\varphi = 0. \quad (80)$$

Здесь  $B_r, B_\theta, B_\varphi$  - составляющие вектора индукции магнитного поля вдоль единичных векторов сферической системы координат,  $\beta = 4\pi\rho\omega/c$ . Для точек вне шара поле равно :

$$\mathbf{B} = \frac{3(\vec{\mu} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} - \vec{\mu}}{r^3}, \quad (81)$$

где  $\mu = \beta R^5/15$  - магнитный момент шара, направленный вдоль оси вращения. Подставляя (80), (81) в (70), находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{\beta^2}{8\pi} \left\{ \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{5} \right)^2 \cos^2 \theta + \left( \frac{2r^2}{5} - \frac{R^2}{3} \right)^2 \sin^2 \theta \right] r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi + \right. \\ & \left. + \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{R^5}{15} \right)^2 \frac{3 \cos^2 \theta + 1}{r^6} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \right\} = \frac{10\mu^2}{7R^3}. \quad (82) \end{aligned}$$

**Пример 1.4.3.** По двум концентрическим бесконечным цилиндрическим поверхностям текут одинаковые, но противоположно направленные токи силы  $I$ . Радиусы цилиндров  $R_1$  и  $R_2$ , ( $R_1 < R_2$ ). Вычислить энергию магнитного поля, приходящуюся на единицу длины цилиндров.

Поле внутри цилиндров  $B = 2I/cr$ , где  $r$  -радиальная переменная цилиндрической системы координат,  $c$ -скорость света. В других точках поле равно нулю. В результате на основании (70) находим для энергии поля внутри цилиндров высоты  $H$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^H \int_0^{2\pi} \left(\frac{2I}{cr}\right)^2 r dr dz d\varphi = \frac{I^2 H}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Таким образом, энергия, приходящаяся на единицу длины цилиндров, равна:

$$\frac{\varepsilon}{H} = \frac{I^2}{c^2} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (83)$$

**Пример 1.4.4.** Вычислить коэффициенты взаимной индукции двух прямых параллельных линий токов  $I$ . Расстояние между проводниками равно  $h$ . Длина проводников  $l$ .

На основании (76)

$$\begin{aligned} L_{12} &= \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{(d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \int_0^l \int_0^l \frac{dy_1 dy_2}{\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + h^2}} = \\ &= \int_0^l \ln \frac{(l - y) + \sqrt{(l - y)^2 + h^2}}{\sqrt{y^2 + h^2} - y} dy. \end{aligned} \quad (84)$$

Интегрируя (84) по частям, получаем:

$$L_{12} = l \ln \left( \frac{h}{\sqrt{l^2 + h^2} - l} \right) - 2(\sqrt{l^2 + h^2} - h) + l \ln \left( \frac{l}{\sqrt{l^2 + h^2} - l} \right). \quad (85)$$

**Пример 1.4.5.** Однородно заряженный цилиндр произвольной высоты и радиуса  $R$  вращается вокруг своей оси симметрии с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Определить энергию взаимодействия цилиндра с внешним магнитным полем  $\mathbf{B}$ .

На основании (55) вычислим магнитный момент цилиндра:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int_0^R \int_0^H \int_0^{2\pi} r \rho r \vec{\omega} r dr dz d\varphi = \frac{QR^2}{4c} \vec{\omega}, \quad (86)$$

где  $\rho$  -плотность заряда. На основании (77) энергия магнитного момента во внешнем поле определяется скалярным произведением вектора индукции и вектора магнитного момента. В результате  $\varepsilon = QR^2(\vec{\omega} \cdot \mathbf{B})/4c$ .

**Пример 1.4.6.** Оценить по порядку величины самоиндукцию тонкого замкнутого проводника радиуса  $R$  и длины  $l \gg R$ .

На расстояниях  $r \ll l$  от оси проводника его поле мало отличается от поля прямого проводника. Считая распределение тока равномерным по сечению, магнитная энергия внутри проводника равна :

$$W_1 = \int_0^R \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{B^2}{8\pi} r dr dz d\varphi = \frac{1}{8\pi} \int_0^R \left( \frac{2I}{cR^2} \right)^2 r^2 r dr \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{I^2 l}{4c^2}. \quad (87)$$

Для энергии вне проводника получаем :

$$W_2 = \int_R^\infty \frac{B^2}{8\pi} r dr dz d\varphi = \frac{I^2}{c^2} l \int_R^\infty \frac{dr}{r}. \quad (88)$$

Подынтегральное выражение (88) правильно описывает поле только на расстояниях  $r \ll l$ . При  $r \gg l$  поле убывает быстрее, так как на больших расстояниях  $B \sim 1/r^3$ . В результате можно получить оценку  $W_2$ , если интегрирование ограничить областью  $r \sim l$ :

$$W_2 \approx \frac{I^2}{c^2} l \ln \left( \frac{l}{R} \right). \quad (89)$$

В результате для коэффициента самоиндукции находим:

$$L \approx \frac{2c^2}{I^2} W_2 \approx 2 \left[ \frac{l}{4} + l \ln \left( \frac{l}{R} \right) \right] \approx 2l \ln \left( \frac{l}{R} \right). \quad (90)$$

**Пример 1.4.7.** Два равномерно заряженных шара радиуса  $R$  вращаются с угловыми скоростями  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{\omega}_2$ . Заряды шаров  $q_1$  и  $q_2$ . Шары находятся на расстоянии  $l \gg R$  друг от друга. Определить энергию взаимодействия шаров.

На основании (54) поле, создаваемое первым шаром в точке расположения второго шара, равно:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\vec{\mu}_1 \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \vec{\mu}_1}{l^3}, \quad (91)$$

где  $\mathbf{n} = \mathbf{l}/l$  -единичный вектор в направлении от первого шара ко второму,  $\vec{\mu}_1$ -магнитный момент первого шара. Энергия взаимодействия магнитного момента второго шара с полем, создаваемым первым шаром, равна :

$$\varepsilon = (\vec{\mu}_2 \cdot \mathbf{B}) = \frac{3(\vec{\mu}_1 \cdot \mathbf{n})(\vec{\mu}_2 \cdot \mathbf{n}) - (\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2)}{l^3}. \quad (92)$$

Магнитные моменты шаров равны (65):  $\vec{\mu}_i = R^2 q_i \vec{\omega}_i / 5$  В результате для энергии взаимодействия шаров находим :

$$\varepsilon = \left( \frac{R^2}{5c} \right)^2 q_1 q_2 \frac{(\vec{\omega}_1 \cdot \mathbf{n})(\vec{\omega}_2 \cdot \mathbf{n}) - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2)}{l^3}. \quad (93)$$

**Пример 1.4.8.** Два длинных параллельных провода (сопротивление которых пренебрежимо мало) замкнуты с одной стороны на сопротивление  $R$ , а с другого конца подключены к источнику постоянного напряжения. Радиус сечения каждого провода в  $\eta = 20$  раз меньше расстояния между осями проводов. Определить значение сопротивления  $R$ , при котором сила взаимодействия проводов обращается в нуль.

На каждом из проводов (протекает по ним ток или нет) имеются поверхностные заряды противоположных знаков (в соответствии со знаками полюсов источника постоянного напряжения). Следовательно, кроме силы взаимодействия токов посредством магнитного поля  $F_m$ , необходимо еще учесть электрическую силу  $F_e$ , действующую на провод со стороны другого провода. Обозначим величину заряда на единицу длины  $\tau$ , а расстояние между проводами  $l$ . По теореме Гаусса в электростатике, выбирая произвольную поверхность  $S$  в виде цилиндра высоты  $h$  соосно с проводником, можно определить напряженность электрического поля, создаваемое заряженным проводником на произвольном расстоянии  $r$  от него. Тогда:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E 2\pi r h = 4\pi q = 4\pi \tau h. \quad (94)$$

Таким образом, величина электрической силы взаимодействия проводников, приходящаяся на единицу длины провода, равна:

$$F_e = \tau E = \tau \frac{2\tau}{l} = \frac{2\tau^2}{l} \quad (95)$$

Магнитная составляющая силы, приходящаяся на единицу длины провода, вычисляется на основании формул (8), (78). В результате величина магнитной силы  $F_m$ , приходящейся на единицу длины проводника, есть:

$$F_m = \frac{2}{c^2} \frac{I^2}{l}. \quad (96)$$

Отметим, что обе силы, электрическая и магнитная, направлены в противоположные стороны. Электрическая сила вызывает притяжение проводников, т.к. обусловлена взаимодействием зарядов противоположных знаков, а магнитная сила вызывает отталкивание проводников. Отношение этих сил равно:

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{I^2}{c^2 \tau^2}. \quad (97)$$

В свою очередь, между величинами  $I$  и  $\tau$  существует связь, если определить емкость проводников, приходящуюся на единицу длины  $C_\tau = \frac{\tau}{U}$ . Взаимная емкость двух проводников определяется как коэффициент  $C$  в соотношении  $q = C(\varphi_2 - \varphi_1) = C\Delta\varphi$ . Для определения  $\Delta\varphi$  по принципу суперпозиции представим  $\Delta\varphi = |\Delta\varphi_+| + |\Delta\varphi_-|$ , где  $|\Delta\varphi_\pm|$  - разности потенциалов на поверхностях проводников, создаваемые зарядами ( $\pm$ ) проводников. По определению, для  $|\Delta\varphi_+|$  находим:

$$|\Delta\varphi_+| = \int_{R_0}^{l-R_0} E dr = \int_{R_0}^{l-R_0} \frac{2\tau}{r} dr = 2\tau \ln \frac{l-R_0}{R_0}, \quad (98)$$

где  $R_0$  - радиус проводников. Очевидно, что  $|\Delta\varphi_-| = |\Delta\varphi_+|$ . Таким образом, с учетом  $l = \eta R_0$ , получим:

$$C_\tau = \frac{\tau}{|\Delta\varphi|} = \frac{1}{4} \ln \frac{l-R_0}{R_0} = \frac{1}{4} \ln(\eta - 1). \quad (99)$$

В результате:

$$\tau = C_\tau U = \frac{1}{4 \ln(\eta - 1)} U = \frac{RI}{4 \ln(\eta - 1)}. \quad (100)$$

На основании последнего равенства находим:

$$\frac{I}{\tau} = \frac{4}{R} \ln(\eta - 1). \quad (101)$$

Подставляя (101) в (97), для отношения сил получим:

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{16 \ln^2(\eta - 1)}{c^2 R^2}. \quad (102)$$

Очевидно, что результирующая сила взаимодействия обращается в нуль, когда соотношение (102) равно единице. Обозначим величину сопротивления, при котором силы равны и уравновешены, через  $R_c$ .

На основании (102) имеем:  $R_c = \ln(\eta - 1)/c$ . Таким образом, если сопротивление  $R < R_c$ , то  $F_m > F_e$  и провода отталкиваются, если же  $R > R_c$ , то  $F_m < F_e$  и провода притягиваются.

**Задание на дом:** Решить задачу 2.18 на стр. 27.

## 2 УПРАЖНЕНИЯ к гл.1.

2.1. Определить распределение объемной плотности тока в пространстве, если напряженность поля равна:  $\mathbf{H} = (\vec{\mu} \cdot \mathbf{r})[\vec{\mu} \times \mathbf{r}]$ . (см. задачу 140а [1]).

2.2. Доказать, что для замкнутого тока с плотностью  $\mathbf{j}$  выполняется равенство  $\int \mathbf{j} dv = 0$ , где интегрирование проводится по всему объему с током, а функция  $\mathbf{j}$  непрерывна внутри данного объема (см. задачу 144 [1]).

2.3. По бесконечной цилиндрической поверхности радиуса  $R$  параллельно ее оси течет однородный ток с поверхностной плотностью  $\mathbf{i}_0$ . Найти индукцию магнитного поля в любой точке пространства (см. задачу 144 [1]).

2.4. Внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$  параллельно его оси течет ток с объемной плотностью, зависящей только от модуля радиуса вектора цилиндрической системы координат  $r$ ,  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 r^3$  ( $\mathbf{j}_0$  - постоянный вектор). Найти напряженность магнитного поля в любой точке пространства.

2.5. В цилиндре радиуса  $R_1$  протекает однородный постоянный ток с плотностью  $\mathbf{j}_1 = \text{const}$ . В цилиндрическом слое, охватывающем цилиндр  $R_1$  с внешним радиусом  $R_2$ , протекает постоянный ток  $\mathbf{j}_2 = \text{const}$  в противоположном направлении. При каком соотношении между токами поле вне проводника равно нулю?

2.6. Внутри бесконечного цилиндра радиуса  $R$  параллельно его оси течет ток с объемной плотностью  $\mathbf{j} = \text{const}$ . Вычислить поток вектора напряженности магнитного поля через квадратную рамку со стороной  $a > R$ , если одна из сторон рамки совпадает с осью цилиндра.

2.7. Ток  $I$  течет по длинному прямому проводнику в форме полуцилиндрической поверхности радиуса  $R$ . Найти магнитную индукцию на оси данной поверхности (решение см. в [2], стр 148 ).

2.8. Внутри однородного длинного прямого провода круглого сечения

имеется круглая цилиндрическая полость, ось которой параллельна оси провода и смещена относительно последней на расстояние  $l$ . По проводу течет постоянный ток плотности  $\mathbf{j}$ . Найти магнитную индукцию внутри полости (решение см. в [2], стр 148).

2.9. Шар радиуса  $R$ , равномерно заряженный с объемной плотностью  $\rho$ , вращается вокруг своей оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Найти векторный потенциал в любой точке пространства (решение см. в [1], задача 221).

При решении потребуется вид векторного лапласиана  $\Delta \mathbf{A}$  в сферической системе координат (см. в [3]).

$$\Delta \mathbf{A} |_{r=} = \Delta A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} A_\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\Delta \mathbf{A} |_{\theta=} = \Delta A_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\Delta \mathbf{A} |_{\varphi=} = \Delta A_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} A_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}.$$

2.10. В сферических координатах компоненты вектора плотности тока в одном из возбужденных состояний атома водорода равны:

$$j_r = j_\theta, \quad j_\varphi = \frac{1}{2 \cdot 3^8} \frac{e \hbar}{\pi m a^7} r^3 \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right) \sin^3 \theta,$$

где  $a = \hbar^2 / m e^2$  - Боровский радиус,  $\hbar$  - постоянная Планка,  $m$  - масса электрона,  $e$  - его заряд. Найти индукцию магнитного поля в начале координат

2.11. Решить задачи, рассмотренные в упражнениях 2.4 – 2.6, 2.8 – 2.10, методом, основанным на использовании закона Био-Саввара-Лапласа.

2.12. Средняя плотность заряда электронного облака в атоме водорода равна  $\rho = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$ , где  $a$  - Боровский радиус (см. упражнение 2.10),  $r$  - расстояние от протона,  $e$  - заряд электрона. Если поместить атом во внешнее однородное поле с индукцией  $\mathbf{B} = \text{const}$ , то электронное облако придет во вращение (теорема Лармора), которое создаст в пространстве объемную плотность тока  $\mathbf{j} = \frac{e \rho}{2 m c} [\mathbf{r} \times \mathbf{B}]$ . Определить, на какую величину изменится вектор индукции поля в центре атома? (см. задачу 173 в [1]).

2.13. Шар радиуса  $R$  заряжен равномерно с постоянной плотностью  $\rho$  до величины заряда  $Q$ . Одна половина шара вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ , а другая, с угловой скоростью  $\omega_2$  в противоположном направлении. Найти магнитное поле в центре шара.

2.14. По тонкому кольцу радиуса  $R$  течет ток  $I$ . Определить вектор индукции магнитного поля на оси кольца. (См. задачу 189 в [1]).

2.15. Найти векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и вектор индукции магнитного поля на больших расстояниях от шара радиуса  $R$ , заряженного с постоянной объемной плотностью  $\rho$ , вращающегося с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ .

2.16. Ток течет по тонкой трубке в форме окружности радиуса  $R$ . Определить индукцию магнитного поля на больших расстояниях от тока. Сравнить ответ с результатом, полученным в упражнении 2.3.

2.17. Два цилиндра высоты  $H$  и радиуса  $R$  заряжены с постоянной объемной плотностью  $\rho$  и вращаются вокруг осей симметрии с угловыми скоростями  $\vec{\omega}_1$  и  $\vec{\omega}_2$ . Оси цилиндров находятся в одной плоскости и расположены под углом  $\alpha$  друг к другу. Найти поле, создаваемое такой системой на больших расстояниях.

2.18. Определить энергию магнитного поля тока, протекающего по цилиндрическому проводнику радиуса  $R$  с плотностью тока  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$ .

## Список литературы

- [1] *Алексеев А.И.* Сборник задач по классической электродинамике. -М.:Наука,1977. -318с.
- [2] *Иродов И.Е.* Основные законы электродинамики. -М.: Высш. шк., 1983, -279с.
- [3] *Арфкен Г.* Математические методы в физике. -М.: Физматгиз, 1970. -712 с.
- [4] *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. -М.: Мир, 1965. -804с.
- [5] *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. -М.: Изд-во Иностран. лит., 1958. -1054с.

[6] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. -М., Наука, 1971. -1108 с.

[7] *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. -М.: Наука, 1970. -503 с.

## Содержание

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>МАГНИТОСТАТИКА</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Система уравнений Максвелла . . . . .   | 1         |
| 1.2      | Векторный потенциал. Закон Био-Саввара-Лапласа. . . . .   | 7         |
| 1.3      | Поле системы замкнутых токов на больших расстояниях.<br>Магнитный момент системы токов. . . . . | 14        |
| 1.4      | Энергия и силы в магнитном поле. Энергия тока во внешнем<br>поле. . . . .                       | 18        |
| <b>2</b> | <b>УПРАЖНЕНИЯ к гл.1.</b>   | <b>25</b> |

Составитель: профессор Запрягаев Сергей Александрович

Технический редактор: Тихомирова Ольга Александровна