§ 1 Основные уравнения. Граничные условия

Магнитостатическое поле является частным случаем электромагнитного поля, которое создается постоянными во времени токами. В этом случае силовые характеристики поля не зависят от времени. Имеется ряд тождественных способов описания магнитостатического поля. Ниже приведены четыре, наиболее часто применяемые на практике.

Дифференциальные уравнения.

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0; \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}; \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{B}$ -вектор индукции, $\mathbf{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, $\mathbf{M}$ - вектор намагничения или магнитный момент единицы объема вещества, $\mathbf{j}$ - вектор плотности тока. Для однородных, изотропных магнетиков $\mathbf{M} = \alpha\mathbf{B}$ и $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mu = 1/(1 - 4\pi\alpha)$, где α - магнитная восприимчивость, а μ -магнитная проницаемость среды.

Интегральные уравнения.

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0, \quad d\mathbf{s} = \mathbf{n}\,ds; \qquad \oint_L \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\,I, \quad d\mathbf{l} = \vec{\tau}\,dl, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности S, а $\vec{\tau}$ -единичный вектор касательной к контуру L, вдоль направления тока.

Метод векторного потенциала.

Метод описания магнитостатического поля с использованием векторного потенциала $\mathbf{A}$ основан на соотношении $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. Обычно векторный потенциал для постоянного магнитного поля выбирается, удовлетворяющим следующему условию калибровки $\mathrm{div}\,\mathbf{A} = 0$. В частном случае магнитостатического поля кулоновская калибровка и калибровка Лоренца совпадают. Если магнитная проницаемость $\mu = const$, то векторный потенциал удовлетворяет неоднородному уравнению Пуассона:

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r}). \tag{3}$$

Решение однородного уравнения Пуассона (3) при отсутствии граничных условий для поля имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dv'. \tag{4}$$

Векторы Герца.

При использовании метода описания магнитостатического поля с применением векторов Герца отличным от нуля является вектор Герца магнитного типа $\vec{\Pi}_m$. Данный вектор также как и векторный потенциал удовлетворяет неоднородному уравнению Пуассона:

$$\nabla^2\,\vec{\Pi}_m(\mathbf{r}) = -4\pi\,\mathbf{M}(\mathbf{r}).$$

Решение этого уравнения для случая отсутствия граничных условий есть:

$$\vec{\Pi}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dv'.$$

Граничные условия.

Поведение векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ магнитостатического поля на границе раздела двух сред может быть определено аналогично случаю электростатического поля (см. глава **????**). В результате для нормальных составляющих поля к границе раздела двух сред получим поверхностные уравнения вида:

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Div}\mathbf{B} \equiv B_{2n} - B_{1n} = 0; \quad \Longrightarrow \quad \mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0;$$

Из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$ следуют поверхностные уравнения для тангенциальных составляющих магнитного поля:

$$\operatorname{Rot}\mathbf{H} \equiv H_{1\tau} - H_{2\tau} = \frac{4\pi}{c}\, i_n; \quad \to \quad \frac{1}{\mu_1}B_{1\tau} - \frac{1}{\mu_2}B_{2\tau} = \frac{4\pi}{c}\, i;$$

Так как для стационарных токов $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, то нормальные составляющие тока на границе раздела двух сред ведут себя следующим образом:

$$j_{2n} - j_{1n} = 0.$$

Поведение тангенциальных составляющих тока может быть найдено на основании $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ и выражения (**??**)

$$\frac{1}{\sigma_1}j_{1\tau} = \frac{1}{\sigma_2}j_{2\tau}$$

Поведение потенциалов и векторов Герца на границе раздела двух сред. ???

Линии, касательные к которым совпадают с направлением тока в данной точке называются линиями тока. Для стационарности тока $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$ линии тока являются замкнутыми и не имеют ни начала, ни конца. Это означает, что существование постоянного тока только под действием кулоновских сил электростатического поля невозможно.

Для доказательства данного утверждения рассмотрим контурный интеграл вдоль произвольного замкнутого контура L:

$$\oint_L \mathbf{j}\cdot d\mathbf{l} = \sigma\oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\sigma\oint_L \operatorname{grad}\varphi\cdot d\mathbf{l} = -\sigma\oint_L d\varphi = 0 = \pm\oint_L j\, dl.$$

В последнем равенстве учтено, что направление плотности тока и вектора касательной к контуру или совпадает или противоположно. Таким образом, в силу произвольности контура интегрирования величина тока j должна быть равна нулю.

Обобщенный закон Ома.

Постоянные токи существуют только при наличии полей не электростатического происхождения. Эти поля называются полями сторонних сил. Поле сторонних сил принято характеризовать вектором напряженности сторонних сил $\mathbf{E}_s$. Смысл этого вектора состоит в том, что $\mathbf{E}_s$ определяется как напряженность электрического поля, порождаемая сторонними силами и приводящая к той же плотности тока, что и созданная сторонними силами. Это означает, что для замкнутого контура с током дифференциальная форма закона Ома при наличии сторонних сил обобщается и имеет вид:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_s). \tag{5}$$

§2 Поле системы токов

Мультипольное разложение.

В случае однородной магнитоизотропной среды векторный потенциал произвольной системы токов можно представить в виде мультипольного разложения векторного потенциала в полной аналогии со случаем мультипольного разложения скалярного потенциала:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dv' = \mu\sum_{l=0}^{\infty}\mathbf{A}_l(\mathbf{r}) = \mu\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{c}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\, P_l(\cos\alpha)\, dv',$$

где α -угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}^{'}$, A_l — мультиполь векторного потенциала. Для компонент вектора мультиполя векторного потенциала применимы методы вычислений, которые были описаны для вычисления мультиполей скалярного потенциала (Глава **?? ??**).

Поле на больших расстояниях.

Как и в случае постоянного электрического поля важное значение имеет случай определения поля на больших расстояниях от замкнутой системы токов. Очевидно, что в этом случае радиальная координата точки наблюдения $r = r_>$, а радиальная координата точки интегрирования $r^{'} = r_<$.

Рассмотрим явные выражение нескольких первых слагаемых в мультипольном разложении векторного потенциала.

Нулевой мультиполь.

Для ограниченных в пространстве замкнутых токов нулевой мультиполь векторного потенциала равен нулю, что наглядно видно при предельном переходе к линейным токам:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{1}{c}\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}^{'})\frac{1}{r}\,dv^{'} \quad \Longrightarrow \quad \sum_i \frac{I_i}{cr}\oint_{L_i} d\mathbf{l} = 0.$$

Первый мультиполь.

Первый мультиполь векторного потенциала определяется выражением:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{c}\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}^{'})\frac{r^{'}}{r^2}\,P_1(\cos\alpha)\,dv^{'} = \frac{1}{c}\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}^{'})(\mathbf{r}^{'}\cdot\mathbf{a})\,dv^{'}; \qquad \mathbf{a} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Для дальнейших преобразований представим тождественно подынтегральное выражение в определении первого мультиполя следующим образом:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}^{'}\cdot\mathbf{a}) \equiv \frac{1}{2}\Big[\mathbf{j}(\mathbf{r}^{'}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}^{'}\cdot\mathbf{a})\Big] = \frac{1}{2}\Big\{[\mathbf{a}\times[\mathbf{j}\times\mathbf{r}^{'}]] + \mathbf{r}^{'}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}^{'}\cdot\mathbf{a})\Big\}.$$

В результате, векторный мультиполь $\mathbf{A}_1$ можно переписать в виде:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2c}\int_V [[\mathbf{r}^{'}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}^{'})]\times\mathbf{a}]\,dv^{'} + \mathbf{I} = \frac{[\vec{\mu}\times\mathbf{r}]}{r^3} + \mathbf{I}. \tag{6}$$

Здесь $\vec{\mu}$ -магнитный момент системы токов (**??**)

$$\vec{\mu} \equiv \frac{1}{2c}\int_V [\mathbf{r}^{'}\times\mathbf{j}(\mathbf{r}^{'})]dv^{'} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{I}{2c}\oint_L [\mathbf{r}^{'}\times d\mathbf{l}],$$

а интеграл $\mathbf{I}$ определен равенством:

$$\mathbf{I} \equiv \frac{1}{2c}\int_V \Big[\mathbf{r}^{'}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}^{'}\cdot\mathbf{a})\Big]\,dv^{'} \equiv \frac{1}{2c}\int_V \mathbf{b}\,dv^{'}. \tag{7}$$

Покажем, что выделенное выражение $\mathbf{I}$ в формуле (6) обращается в ноль для замкнутых токов. Для этого перепишем подынтегральное выражение в интеграле $\mathbf{I}$ в декартовых координатах:

$$\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{3}\mathbf{e}_k\,x_k^{'}\sum_{n=1}^{3} j_n\,a_n + \sum_{k=1}^{3}\mathbf{e}_k\,j_k\sum_{n=1}^{3} x_n^{'}\,a_n,$$

где $\mathbf{e}_k$ - единичные векторы декартовой системы координат, $x_k^{'}$, j_k, a_k - декартовы компоненты векторов $\mathbf{r}^{'}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{a}$, соответственно.

Вычислим последовательно полученные интегралы. Рассмотрим для примера выражение:

$$\int_V x^{'} j_x(\mathbf{r}^{'})\, dv^{'} = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}^{'})\mathrm{grad}\left(\frac{x^{'2}}{2}\right) dv^{'} = \int_V \left[\vec{\nabla}\left(\frac{x^{'2}}{2}\mathbf{j}\right) - \frac{x^{'2}}{2}\mathrm{div}\,\mathbf{j}\right] dv^{'} = 0. \tag{8}$$

Здесь слагаемое, содержащие $\mathrm{div}(x^{'2}\mathbf{j})$ равно нулю на основании теоремы Гаусса, так как переходя к поверхностному интегралу, получим выражение содержащее нормальную составляющую плотности тока на поверхности, ограничивающей объем V. Для замкнутых, ограниченных в пространстве токов такая составляющая равна нулю. Второе слагаемое в (8) равно нулю в силу условия стационарности тока $\mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0$.

Полностью аналогичные вычисления для слагаемых вида $y^{'} j_y$ и $z^{'} j_z$ также приводят к выражениям равным нулю. Следовательно

$$\int_V x_k^{'} j_k(\vec{\mathbf{r}}^{'})\, dv^{'} = 0, \qquad k \in 1, 2, 3.$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые в (7). Для простоты ограничимся проекцией вектора $\mathbf{I}$ на ось x:

$$I_x = \frac{1}{2c}\int \left(x^{'} j_y a_y + x^{'} j_z a_z + j_x y^{'} a_y + j_x z^{'} a_z\right) dv^{'} =$$

$$= \frac{1}{2c}\int \left[a_y\left(x^{'} j_y + y^{'} j_x\right) + a_z\left(x^{'} j_z + z^{'} j_x\right)\right] dv^{'} =$$

$$= \frac{1}{2c}\int \left[a_y\left(\mathbf{j}\cdot \mathrm{grad}^{'}\,(x^{'} y^{'})\right) + a_z\left(\mathbf{j}\cdot \mathrm{grad}^{'}\,(x^{'} z^{'})\right)\right] dv^{'} =$$

$$= \frac{1}{2c}\int \left[a_y\left(\mathrm{div}\,(\mathbf{j}\,x^{'} y^{'})\right) - x^{'} y^{'}\mathrm{div}\,\mathbf{j} + a_z\left(\mathrm{div}\,(\mathbf{j}x^{'} z^{'})\right) - x^{'} z^{'}\mathrm{div}\,\mathbf{j}\right] dv^{'} = 0$$

Аналогично можно показать, что I_y и I_z также равны нулю.

В результате, первый мультиполь векторного потенциала определяется магнитным моментом системы токов.

$$\mathbf{A}_1 = \frac{[\mu \times \mathbf{r}]}{r^3}. \tag{9}$$

Индукция на больших расстояниях.

Соответственно вектор индукции в этом приближении равен:

$$\mathbf{B}_1 = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_1 = \frac{3(\vec{\mu}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n} - \vec{\mu}}{r^3}, \qquad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{10}$$

Как следует из полученного выражения произвольная замкнутая система токов создает на больших расстояниях магнитное поле величина вектора индукции которого затухает с ростом расстояния от системы как r^{-3}. В связи со слабостью магнитного поля обычно достаточно ограничится первыми неисчезающими слагаемыми для определения поля с необходимой точность.

Последующие мультиполи векторного потенциала приводят к определению магнитно-квадрупольного, магнитно -октупольного и т.д. моментов системы токов. Их явные выражения не представляют интереса в рамках данного курса.

§3 Энергия постоянного магнитного поля

Общая формула для расчета энергии магнитостатического поля ε в объеме V имеет вид:

$$\varepsilon = \int_V \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{8\pi}\, dv. \tag{11}$$

Данное выражение можно переписать тождественно с использованием других характеристик магнитного поля. Учитывая, что $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ выражение (11) можно переписать в виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi}\int_V \Big[\mathrm{div}\,[\mathbf{A}\times\mathbf{H}] + \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\Big]\,dv = \tag{12}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\oint_S [\mathbf{A}\times\mathbf{H}]\cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{8\pi}\int_V \mathbf{A}\cdot\mathrm{rot}\,\mathbf{H}\,dv,$$

где S – поверхность, ограничивающая объем пространства V

При рассмотрении всего пространства при отсутствии специальных граничных условий поверхностный интеграл в (12) обращается в ноль, так как на сфере бесконечного радиуса подынтегральная функция затухает быстрее чем растет элемент поверхности. В этом случае выражение (12), по смыслу, эквивалентно выражению для энергии электростатического поля системы зарядов, включая собственную энергию зарядов (**??**) и определяется выражением:

$$\varepsilon = \frac{1}{2c}\int_V \mathbf{j}\cdot\mathbf{A}\,dv \tag{13}$$

Для одного замкнутого линейного проводника выражение (13) имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{I}{2c}\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} \tag{14}$$

Система проводников.

Пусть имеется N проводников с током. В этом случае суммарный векторный потенциал в некоторой точке равен $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{A}_i$, где $\mathbf{A}_i$ -векторный потенциал, создаваемый i -ым проводником. В силу принципа суперпозиции значение $\mathbf{A}_i$ не зависит от наличия других проводников и силы тока в них. На основании (13) получим (нарисовать рисунок !!)

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_{ii} + \sum_{i,k=1,i>k}^{N}\varepsilon_{ik}; \qquad \varepsilon_{ii} \equiv \frac{1}{2c}\int_{V_i}\mathbf{j}_i\cdot\mathbf{A}_i\,dv, \tag{15}$$

где ε_{ii} -собственная энергия i-го проводника, а ε_{ik} -энергия взаимодействия i-го и k-го проводников, равная:

$$\varepsilon_{ik} \equiv \frac{1}{2c}\int_{V_i}\mathbf{j}_i(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}_k(\mathbf{r})\,dv + \frac{1}{2c}\int_{V_k}\mathbf{j}_k(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{A}_i(\mathbf{r}')\,dv'.$$

В соответствии с (3) оба интеграла в последнем выражении одинаковы. Таким образом, энергия взаимодействия i и k -го проводников может быть представлена в виде:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{c}\int_{V_i}\mathbf{j}_i(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}_k(\mathbf{r})\,dv = \frac{1}{c^2}\int_{V_i}\int_{V_k}\frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{r})\cdot\mathbf{j}_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dv\,dv'. \tag{16}$$

Данное выражение позволяет записать энергию взаимодействия проводника в котором определена плотность тока $\mathbf{j}$ с внешним полем $\mathbf{A}$, следующим образом:

$$\varepsilon_{int} = \frac{1}{c}\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})\,dv. \tag{17}$$

Данная формула эквивалентна выражению (**??**) в случае системы зарядов во внешнем электростатическом поле.

Коэффициенты индукции.

Плотность тока в линейном проводнике и создаваемое им поле пропорциональны силе тока. Поэтому собственную (15) и взаимную (16) энергии проводников можно записать в виде:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{I_i^2}{2c^2}\,L_{ii}, \qquad \varepsilon_{ik} = \frac{I_i I_k}{c^2}\,L_{ik}. \tag{18}$$

Здесь $L_{ii} \equiv L_i$ - коэффициент самоиндукции проводника, а L_{ik} -коэффициенты взаимоиндукции i-го и k-го проводников. Данные коэффициенты определяются только геометрией проводников и не зависят от силы тока:

$$L_{ik} \equiv \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Longleftrightarrow \frac{1}{I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}_i(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}_k(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\, dv\, dv'. \tag{19}$$

Выражение (19) неприменимо при вычислении коэффициента самоиндукции для линейного проводника, так как оно приводит к расходимости интеграла (19). В этом случае коэффициент самоиндукции следует вычислять через энергию магнитостатического поля:

$$L_{ii} \equiv L_i = \frac{2c^2}{I_i^2} \varepsilon_{ii} \tag{20}$$

Пример.

Например, для оценки величины коэффициента самоиндукции тонкого замкнутого цилиндрического проводника длины l радиуса $s \ll l$, по которому протекает ток силы I, вычислим энергию магнитного поля, создаваемого током. Допуская, что ток равномерно распределен по сечению проводника, на расстояниях $r \ll l$ от оси проводника поле практически совпадает с полем бесконечного прямолинейного цилиндрического проводника:

$$B_\varphi^{(1)}(r < s) = \frac{2I}{cs^2}\, r; \qquad B_\varphi^{(2)}(r > s) = \frac{2I}{cr}.$$

Следовательно энергия поля ε складывается из двух слагаемых - энергии поля внутри проводника ε_1 и энергии поля вне проводника ε_2. При этом:

$$\varepsilon_1 \approx \frac{1}{8\pi} \int_0^s \int_0^l \int_0^{2\pi} (B_\varphi^{(1)})^2\, r\, dr\, dz\, d\varphi = \frac{I^2 l}{4c^2};$$

$$\varepsilon_2 \approx \frac{1}{8\pi} \int_s^\infty \int_0^l \int_0^{2\pi} (B_\varphi^{(2)})^2\, r\, dr\, dz\, d\varphi \approx \frac{I^2 l}{c^2} \int_s^l \frac{dr}{r} = \frac{I^2 l}{c^2} \ln\left(\frac{l}{s}\right).$$

Как следует из представленных оценок при $l \gg s$ имеет место неравенство $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$, поэтому $\varepsilon \approx \varepsilon_2$. В результате на основании (20) для коэффициента самоиндукции рассматриваемого проводника получим:

$$L_i = \frac{2c^2}{I_i^2} \varepsilon_{ii} \approx \frac{2c^2}{I_i^2} \varepsilon_2 \approx 2l \ln\left(\frac{l}{s}\right).$$

Магнитный поток.

Можно установить связь коэффициентов индукции с магнитным потоком, пронизывающим контур с током L_i. Так для собственной энергии линейного проводника получим на основании (14):

$$\varepsilon_{ii} = \frac{I_i}{2c} \oint_{L_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{I_i}{2c} \int_{S_i} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_i}{2c} \int_{S_i} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{I_i}{2c} \Phi_i. \tag{21}$$

где Φ_i -поток вектора индукции магнитного поля через поверхность S_i для которой контур L_i является границей. Отсюда на основании (18) находим: $\Phi_i = I_i\, L_i / c$.

Аналогично для энергии взаимодействия i-го и k-го проводников можно записать:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{c} I_i \Phi_{ik}; \qquad \Phi_{ik} \equiv \int_{S_i} \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{s},$$

где Φ_{ik} -поток вектора индукции магнитного поля, создаваемого k- ым проводником, через поверхность, ограниченную контуром i-го проводника (нарисовать рисунок!!!). В соответствии с (18) получим: $\Phi_{i\,k} = I_k\, L_{i\,k} / c$

§4 Силы в постоянном магнитном поле

Сила Лоренца.

Сила действующая на движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ заряд q, находящийся в магнитном поле с индукцией $\mathbf{B}$ определяется выражением, которое носит название сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Для системы, состоящей из N штук зарядов q_k сила равна:

$$\mathbf{F} = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{F}_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{q_k}{c}[\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_k)].$$

Плотность силы

Соответственно для непрерывно распределенного заряда с плотностью ρ в объеме V выражение для силы, действующей на систему зарядов есть:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\int_V \rho(\mathbf{r}^{'})[\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}^{'})]\, dv^{'} = \frac{1}{c}\int_V [\mathbf{j}(\mathbf{r}^{'}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})^{'}]\, \mathbf{dv}^{'} = \int_{\mathbf{V}} \mathbf{f}\, \mathbf{dv}. \tag{22}$$

Таким образом, сила действующая на единицу объема системы токов или плотность силы $\mathbf{f}$ равна: $\mathbf{f} = [\mathbf{j} \times \mathbf{B}]/\mathbf{c}$.

Произвольная система токов в магнитном поле.

Рассмотрим произвольную, замкнутую систему токов, находящуюся во внешнем поле с индукцией $\mathbf{B}$. Пусть характерные размеры системы токов определяются параметром a. Рассмотрим слабо меняющееся по размерам системы внешнее поле, то есть:

$$\left| a\, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial\, x_i} \right| \ll |B|\, ; \qquad i \in 1, 2, 3.$$

Выберем внутри системы произвольную точку $\mathbf{R}$ и перейдем в систему координат, связанную с данной точкой. В этом случае $\mathbf{r}^{'} = \mathbf{r} + \mathbf{R}$. С учетом плавности поля по размерам системы разложим вектор индукции в ряд Тейлора вблизи точки $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}^{'}) = \mathbf{B}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \approx \mathbf{B}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla})\, \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \ldots \tag{23}$$

Здесь оператор $\vec{\nabla}$ действует на переменные вектора $\mathbf{R}$. С учетом равенства (22) для силы, действующей на систему токов в этом приближении получим:

$$\mathbf{F} \approx \frac{1}{c}\int \Big[\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{R}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{B}(\mathbf{R}) + \ldots\Big]\, dv. \tag{24}$$

Первое слагаемое в данном выражении обращается в ноль в силу ограниченности рассматриваемой системы токов:

$$\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r})\, dv \Longleftrightarrow \sum_i I_i \oint_{L_i} d\mathbf{l} = 0.$$

Таким образом, первое неисчезающее слагаемое в выражении (24) имеет вид:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{c}\int \Big[\mathbf{j} \times (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{B}(\mathbf{R})\Big]\, dv = \frac{1}{c}\sum_{k,l,m=1}^{3} \epsilon_{k\,l\,m}\, \mathbf{e}_m \int j_k\, (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla}) B_l\, dv. \tag{25}$$

Здесь ϵ - единичный, антисимметричный тензор третьего ранга (символ Леви-Чевита), $\mathbf{e}_m$ - единичные векторы декартовой системы координат. В соответствии с (25), расписывая скалярное произведение $(\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla})$

в декартовой системе координат, для вычисления интеграла в данном выражении необходимо провести вычисление интегралов следующего типа:

$$J_{k,n} = \int x_k\, j_n(\mathbf{r})\, dv, \qquad k, n \in 1, 2, 3$$

Рассмотрим для примера интегралы типа $J_{n,n}$. В этом случае получим очевидную цепочку равенств:

$$J_{k,k} = \int x_k\, j_k\, dv = \frac{1}{2} \int \left(\mathbf{j} \cdot \mathrm{grad}\, x_k^2\right)\, dv = \frac{1}{2} \int \left[\mathrm{div}\,(x_k^2\, \mathbf{j}) - x_k^2 \mathrm{div}\, \mathbf{j}\right]\, dv$$

Для стационарного магнитного поля $\mathrm{div}\, \mathbf{j} = 0$ и в соответствии с теоремой Остроградского − Гаусса последнее равенство может быть представлено в виде:

$$J_{k,k} = \frac{1}{2} \oint_S x_k^2\, (\mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}) = 0, \qquad k \in 1, 2, 3,$$

так как для замкнутых токов нормальная составляющая тока на поверхности S, ограничивающей объем занятый токами, равна нулю.

Чтобы найти вид интегралов $J_{k,n}$ при $n \neq k$ рассмотрим частный случай $J_{1,2}$. Выполним следующие тождественные преобразования с подынтегральной функцией:

$$x\, j_y = \frac{1}{2}(x\, j_y + x\, j_y) = \frac{1}{2}(x\, j_y - y\, j_x + x\, j_y + y\, j_x) =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{[\,\mathbf{r} \times \mathbf{j}\,]_z + \mathbf{j} \cdot \mathrm{grad}\,(x\, y)\right\} = \frac{1}{2} \left\{\, [\mathbf{r} \times \mathbf{j}\,]_z + \mathrm{div}\,(xy\mathbf{j}) - xy\, \mathrm{div}\, \mathbf{j}\,\right\}.$$

В результате с учетом условия стационарности тока $\mathrm{div}\, \mathbf{j} = 0$ находим:

$$\int x\, j_y\, dv = \frac{1}{2} \int [\,\mathbf{r} \times \mathbf{j}\,]_z\, dv + \oint x\, y\, (\mathbf{j} \cdot\, d\mathbf{s}) = c\, \mu_z,$$

где μ_z − проекция магнитного момента системы токов на ось z. Аналогичные вычисления для других компонент дает следующий результат:

$$\int x_i\, j_k\, dv = \epsilon_{i\,k\,l} c\, \mu_l; \qquad i \neq k \neq l.$$

Окончательно, на основании (25) находим для F_z:

$$F_z = -\mu_z\, \frac{\partial B_y}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_y}{\partial z} - \mu_z \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial z} =$$

$$= \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial z} - \mu_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}\right) = \mu_x \frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu_y \frac{\partial B_y}{\partial z} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = \left(\vec{\mu} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}\right)$$

Повторяя аналогично вычисления для других компонент проекции силы, получим:

$$F_k = \vec{\mu}\, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_k}; \qquad k \in 1, 2, 3. \tag{26}$$

Тензор натяжений Максвелла.

Также как и в случае электростатического поля, силу действующую на систему токов можно выразить через тензор натяжений Максвелла $M_{\alpha\,\beta}$, который в случае магнитостатического поля равен:

$$M_{\alpha\,\beta} = \frac{1}{4\pi}\, [B_\alpha\, H_\beta + \delta_{\alpha\,\beta}\, (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})] \tag{27}$$

Связь компонент силы с тензором натяжений имеет вид:

$$F_\alpha \equiv \oint_S \sum_{\beta=1}^{3} M_{\alpha\,\beta}\, n_\beta\, ds, \qquad \alpha \in 1, 2, 3.$$

Здесь n_β - декартовы компоненты вектора нормали $\mathbf{n}$ на поверхности S. Построение тензора натяжений в магнитном поле, полностью аналогично случаю электростатического поля и здесь не приводится.

Магнитный момент в магнитном поле.

Сила действующая на магнитный момент из (26) и возникающий момент силы $\mathbf{N}$ равны, соответственно:

$$\mathbf{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\, \mathbf{B}; \qquad \mathbf{N} = [\vec{\mu} \times \mathbf{B}] \tag{28}$$

Как следует из (28) момент сил стремиться повернуть магнитный момент по направлению поля.

Сила действующая на единицу объема магнетика.

Если намагниченное вещество, помещается в магнитное поле или в веществе наводится магнитный момент единицы объема $\mathbf{M}$, то со стороны внешнего поля на это вещество, действует сила, которая может быть определена на основании следующих рассуждений. Выделим в веществе бесконечно малый объем dv. Магнитный момент выделенного объема равен $\mathbf{M}\, dv$. На основании (28) на данный объем со стороны внешнего поля действует бесконечно малая сила, плотность которой равна:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dv} = (\mathbf{M} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{B} = \frac{\mu - 1}{8\pi\mu} \mathrm{grad}\, B^2,$$

где μ магнитная проницаемость среды.

Объемные силы, действующие на сжимаемые магнетики с плотность массы ρ_m определяются выражением [10]:

$$\mathbf{f} = \frac{H^2}{8\pi} \mathrm{grad}\, \mu - \frac{1}{8\pi} \mathrm{grad} \left(H^2 \rho_m \frac{\partial \mu}{\partial \rho_m} \right).$$

§5 Энергия системы токов во внешнем поле

Для ограниченной системы токов, находящихся во внешнем медленно меняющемся в пространстве поле, энергия взаимодействия системы токов с внешним полем на основании (17) равна:

$$-W = \varepsilon_{int} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}')\, dv'.$$

Перейдем в систему координат, связанную с некоторой выделенной точкой $\mathbf{R}$ внутри системы токов и разложим векторный потенциал в ряд Тейлора вблизи этой точки:

$$-W = \varepsilon_{int} = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \left[\mathbf{A}(\mathbf{R}) + (\mathbf{r} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{A} + \ldots \right] dv.$$

После преобразований, аналогичных случаю электростатического поля, получим:

$$W = -(\vec{\mu} \cdot \mathbf{B}) + \ldots; \qquad \vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]\, dv. \tag{29}$$

где $\vec{\mu}$ - магнитный момент системы токов (**??**). Первое слагаемое в выражении (29) определяет энергию магнитного момента во внешнем поле. Следующее слагаемое определяет энергию магнитного квадрупольного момента во внешнем поле и т.д.

Выражение (29) может быть получено из (26). По определению механическая энергия связана с работой по перемещению вдоль линии L под действием силы $\mathbf{F}$ выражением:

$$W = -\int_L (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}) = -\int_L (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) =$$

$$= -\int_L \left(\vec{\mu}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\,dx + \vec{\mu}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}\,dy + \vec{\mu}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}\,dz\right) = -\vec{\mu}\cdot\int_L \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}\,dz\right).$$

$$W = -\vec{\mu}\cdot\mathbf{B}. \tag{30}$$

Энергия вещества в магнитном поле

Для рассмотрения вопроса об энергии вещества помещенного во внешнее магнитное поле предположим, что некоторое распределение токов создает в вакууме поле с индукцией $\mathbf{B}_0$. Данное поле удовлетворяет уравнению $\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0 = 4\pi\mathbf{j}/c$. Энергия такого поля определяется выражением:

$$W_0 = \frac{1}{8\pi}\int B_0^2\,dv.$$

Пусть теперь все пространство заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ, а поле создается тем же распределением токов. Из решения уравнения $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$ следует, что что вектор напряженности $\mathbf{H}$ равен: $\mathbf{H} = \mathbf{B}_0$, а магнитная индукция $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu\mathbf{B}_0$. Поэтому при наличии вещества энергия поля равна:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\,dv = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_0\,dv.$$

Следовательно при заполнении пространства веществом энергия поля увеличилась. Источником этой энергии являются сторонние электродвижущие силы, поддерживающие постоянство тока. Таким образом можно считать, что энергия магнетика во внешнем поле определяется выражением:

$$W_m = W - W_0 = \frac{1}{8\pi}\int\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_0 - B_0^2\right)dv = \frac{\mu-1}{8\pi\mu}\int \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}_0\,dv = \frac{1}{2}\int \mathbf{M}\cdot\mathbf{B}_0\,dv.$$

Здесь $\mathbf{M}$ -вектор намагничения вещества. Данное выражение по сути эквивалентно энергии диэлектрика в электрическом поле, однако отличается знаком. Представленное выражение получено для бесконечного магнетика. Для магнетика конечных размеров полученная формула остается также справедливой.

§6 Вещество в магнитном поле. Диамагнетизм. Парамагнетизм.

Материальное уравнение, задающее магнитные свойства вещества, в системе уравнений Максвелла имеет вид $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$. Здесь $\mathbf{M}$- магнитный момент единицы объема вещества или вектор намагничения. Вектор $\mathbf{M}$ вводит магнитные свойства среды в уравнения. Исторически, исследование магнитных свойств веществ началось с простейших магнитнооднородных веществ. Магнитные свойства таких веществ укладывались в общее соотношение типа: $\mathbf{M} = \chi\mathbf{B}$. Где χ- определялась как константа, характеризующая свойства данного вещества. Предполагалось, что намагниченность в веществе возникает под действием внешнего поля и исчезает при его выключении. Однако оказалось, что вещество в магнитном поле ведет себя в общем случае значительно сложнее Было классифицировано три типа веществ по тому как определяется параметр χ. Первый из них диамагнетики - вещества, атомы которых не имеют собственного магнитного момента в силу симметрии распределения внутренних токов. Для диамагнетиков значение параметра χ оказалось отрицательно $\chi < 0$. В таких веществах внешним полем наводится магнитный момент единицы объема вещества направленный против направления внешнего поля. Второй класс веществ, получивший название парамагнетики, характеризуется тем, что у них под действием поля индуцируется магнитный момент единицы объема, вектор которого направлен вдоль поля. Оказалось, что атомы таких веществ имеют собственный, отличный от нуля магнитный момент. И, наконец, были обнаружены вещества, которые ведут себя во внешнем магнитном поле так, что для них невозможно определить значение постоянной χ и в общем случае появляется зависимость χ от значения внешнего поля $\chi = \chi(\mathbf{B})$. Другими словами параметр χ перестает быть константой, определяющейся структурой вещества. Такие вещества получили наименование ферромагнетики. Дальнейшие исследования показали, что сами ферромагнетики классифицируются на определенные группы, но в задачу данного курса исследование этого вопроса не входит.

Теорема Лармора.

В связи с этим возникает проблема качественного объяснения указанного выше поведения вещества в магнитном поле, основываясь на атомарной модели вещества. Объяснение части явлений поведения вещества в магнитном поле опирается на теорему Лармора. Теорема гласит, что влияние внешнего магнитного поля на связанные в атоме заряды q массы m, в первом порядке по полю, сводится к появлению дополнительного вращения заряда вокруг направления поля $\mathbf{B}$ с угловой скоростью $\vec{\omega}$ равной:

$$\vec{\omega} = -\frac{q}{2mc}\mathbf{B} \tag{31}$$

Последовательное доказательство этой теоремы лежит вне данного курса, но для оценки правильности этого выражения можно рассмотреть силы действующие на связанный в атоме заряд находящийся во внешнем поле. Перейдем в систему координат связанную с зарядом, локализованным в составе атома. В данной системе координат на заряд действуют силы Лоренца, Кариолиса и центростремительная сила. Сила Лоренца равна: $\mathbf{F}_l = q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c$. Сила Кариолиса (при переходе к системе координат связанной с зарядом), определяется выражением: $\mathbf{F}_k = 2m[\mathbf{v}^{'} \times \vec{\omega}]$ а центростремительная сила $\mathbf{F}_c = mv^2/R = m\omega^2 R$. Так как центростремительная сила пропорциональна квадрату частоты, а следовательно на основании (31) квадрату поля поэтому в числе слагаемых, учитывающих только линейные по полю слагаемые $\mathbf{F}_c$ может быть опущена. Теорема Лармора формулируется для случая слабого поля, то есть как приближенное соотношение справедливое с точностью до линейных по полю слагаемых. В выражение для силы Кариолиса входит скорость $\mathbf{v}^{'} = \mathbf{v} - [\vec{\omega} \times \mathbf{r}]$. Как видно второе слагаемое, в данном выражении может быть опущено по той же причине, что и центростремительная сила, как слагаемое более высокого порядка по полю. Таким образом остается приближенное равенство вида $\mathbf{F}_l + \mathbf{F}_k = 0$ или $q[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]/c = -2m[\mathbf{v} \times \vec{\omega}]$ из которого и вытекает формула (31)

Диамагнетизм.

На основании теоремы Лармора **диамагнетизм** или возникновение наведенного магнитного момента, направленного против внешнего индуцирующего поля в веществе, атомы которого не имеют собственного магнитного момента при отсутствии поля, качественно объясняется следующим образом. Под действием поля заряды атомов приобретают дополнительную скорость, связанную с вращением вокруг направления поля равную $\delta\mathbf{v} = [\vec{\omega} \times \mathbf{r}]$. В результате в атоме дополнительно появляется наведенный замкнутый ток с плотностью $\mathbf{j} = \rho\delta\mathbf{v}$. Появление такого тока приводит к возникновению наведенного магнитного момента атома:

$$\delta\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int[\mathbf{r} \times \mathbf{j}]\,dv = \frac{1}{2c}\int[\mathbf{r} \times \rho[\vec{\omega} \times \mathbf{r}]] = \frac{1}{2c}\int\left[\vec{\omega}\,r^2 - \mathbf{r}(\vec{\omega}\cdot\mathbf{r})\right]\rho\,dv.$$

Усреднение наведенного магнитного момента по объему атома приводит к выражению (угловые скобки обозначают операцию усреднения):

$$\langle\delta\vec{\mu}\rangle = \frac{\vec{\omega}}{2c}\int\langle r^2 - z^2\rangle\rho\,dv = \frac{\vec{\omega}}{2c}Zq\langle x^2 + y^2\rangle = \frac{\vec{\omega}}{2c}Zq\frac{2}{3}\langle r^2\rangle = -\frac{Zq^2\langle r^2\rangle}{6mc^2}\mathbf{B}.$$

Здесь допускается, что $\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle = \langle r^2\rangle/3$ в силу симметрии атомной системы. Обозначая далее через N - число атомов в единице объема для вектора магнитного момента единицы объема получим очевидное соотношение:

$$\mathbf{M} = N\langle\delta\vec{\mu}\rangle = \chi\mathbf{B}; \qquad \chi = -\frac{NZq^2}{6mc^2}\langle r^2\rangle < 0,$$

качественно объясняющее явление диамагнетизма.

Установлено, что данный вывод содержит существенную неточность при определении операции усреднения. Теорема Борна-ван Левин [11] показывает, что в классической системе диамагнетизм всегда равен нулю, то есть $< r^2 >= 0$. Однако оказалось, что приведенный выше ошибочный вывод параметра χ для диамагнетизма точно согласуется с результатом квантовомеханического расчета, где $< r^2 >$ определяется в соответствии с принципами квантовой теории.

Парамагнетизм.

Парамагнетизм, проявляется в веществе атомы которого имеют отличный от нуля собственный магнитный момент. При наложении внешнего поля в таком веществе возникает дополнительное диамагнитное намагничение атомов и, кроме того, добавляются процессы связанные со взаимодействием магнитного момента с внешним полем. Опыт и расчеты наведенного диамагнитного момента в атоме показывают, что величина этого момента, как правило, много меньше величины собственного магнитного момента атома. Поэтому диамагнитный эффект в таких средах не рассматривается. Таким образом остается учесть влияние магнитного поля собственно на магнитный момент атома. В этом случае имеются два конкурирующих процесса - ориентирующий и разориентирующий магнитный момент атома в пространстве. Магнитное поле стремится сориентировать магнитный момент атома по направлению поля, а столкновения атомов из-за теплового движения разориентируют атомы.

Учитывая, что энергия взаимодействия магнитного момента с внешним полем равна $W = -(\vec{\mu} \cdot \mathbf{B})$ можно воспользоваться результатами приведенными в разделе об определении вектора поляризации полярных диэлектриков (**??**). Таким образом, результат вычисления вектора намагничения может быть представлен следующим образом:

$$\mathbf{M} = N\mu L(a)\frac{\mathbf{B}}{B}; \qquad a \equiv \frac{\mu B}{kT}. \tag{32}$$

Оценка численного значения параметра a приводит к условию $a \ll 1$. В этом случае:

$$\chi \approx \frac{N\mu^2}{3kT} > 0, \tag{33}$$

так как $L(a) \approx a/3$ для $a \ll 1$.

§7 Ферромагнетизм.

Ферромагнетизм может быть объяснен только с использованием квантовых свойств вещества и в первую очередь на основе понятия спинового магнитного момента. Общие проявления и свойства ферромагнетиков таковы:

-*насыщение намагниченности*, что проявляется в невозможности намагнитить ферромагнитное вещество больше определенной величины;

-*остаточная намагниченность*, которая появляется ненулевой намагниченностью вещества при выключении внешнего намагничивающего поля;

-*разрушение остаточной намагниченности* при достижении определенной критической температуры (температура Кюри);

- сильная *локальная* спонтанная намагниченность по объему вещества.

Все эти явления не характерны для диа- и пара - магнетиков.

Спин электрона.

Качественное представление о явлении ферромагнетизма можно сформировать с использованием понятия спина электрона. *Спин* электрона - это векторное свойство, которое наряду с зарядом и массой определяет поведение электрона во внешнем поле.

Спин электрона - это внутренний механический момент $\mathbf{s}$, который может ориентироваться в пространстве по направлению внешнего поля лишь двояко. Проекция спина на направление поля принимает только два значения $\pm\hbar/2$, здесь $\hbar$ -постоянная Планка.

Два возможных состояния спина условно называют состояниями "спин-вверх"и "спин-вниз". Слово "внутренний"момент используется в определении спина в том смысле, что данное свойство (момент) является неотъемлемой характеристикой электрона, подобно заряду и массе электрона, которые нельзя "отнять"от электрона. Нет электрона без спина, как нет его без заряда или массы.

Магнитный спиновый момент.

Так как электрон заряженная частица, то с внутренним механическим моментом (спином) электрона связан магнитный спиновый момент $\vec{\mu}_s$. Экспериментально установлено, что:

$$\vec{\mu}_s = \frac{q}{mc}\,\mathbf{s}.$$

Таким образом в системе электронов, образующих атом появляется суммарный магнитный момент, который и определяет неклассический характер явления намагничения.

Намагниченность ферромагнетика.

Если обозначить число атомов в единице объема вещества, магнитные моменты которых направлены "вверх"через r, а "вниз"через l, и число атомов в единице объема через n, $(n = r + l)$, то величина магнитного момента единицы объема равна: $M = r\mu - l\mu$. Максимально возможная намагниченность при этом определяется выражением: $M_{max} = n\mu$.

Введем для удобства понятие относительной намагниченности. Обозначим отношение намагниченности вещества к максимально возможному значению намагниченности через $y = M/M_{max}$. Тогда можно написать два очевидных тождества:

$$y = \frac{r}{n} - \frac{l}{n}; \qquad 1 = \frac{r}{n} + \frac{l}{n}$$

или

$$r = \frac{n}{2}(1+y); \qquad l = \frac{n}{2}(1-y)$$

Из термодинамики известно, что основное состояние системы определяется минимум свободной энергии F равной: $F = U - TS$. Здесь U - потенциальная энергия системы, T - абсолютная температура, а S - энтропия системы. Если внешнее поле равно нулю $B = 0$, то $U = 0$ и $F_0 = -TS$.

Известно, что энтропия системы, состоящая из n штук частиц, часть из которых (r штук) находится в одном состоянии, а часть (l штук) во втором состоянии равна: $S = k\ln\{n!/(r!l!)\}$. Учитывая, что $\ln n! \approx n(\ln n - 1)$ получим для свободной энергии системы в этом случае:

$$F_0 = -kT\ln\frac{n!}{r!l!} \approx -kT\Big[n\ln n - r\ln r - l\ln l\Big] =$$

$$= kT\frac{n}{2}\Big[(1+y)\ln(1+y) + (1-y)\ln(1-y)\Big].$$

Необходимое условие минимума свободной энергии, как условие стационарного состояния функции от относительной намагниченности y есть:

$$\frac{\partial F_0}{\partial y} = kT\frac{n}{2}\Big[\ln(1+y) + 1 - \ln(1-y) - 1\Big] = kT\frac{n}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} = 0$$

Из полученного равенства видно, что условие минимума свободной энергии выполняется только при $y = 0$. Следовательно в свободном состоянии намагниченность системы спинов равна нулю.

Если предположить, что имеется некоторая энергия взаимодействия магнитных спиновых моментов атомов, то в произвольном случае эта энергия может быть лишь квадратичной функцией от y (так как нет выделенного направления). Допустим эта энергия имеет вид: $U = -nJy^2$, где J константа. В этом случае $F = -nJy^2 - ST$ и условие минимума свободной энергии есть:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = kT\frac{n}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} - 2nJy = 0; \qquad \ln\frac{1+y}{1-y} = 2\frac{\Theta}{T}y; \quad \Theta \equiv \frac{2J}{k}.$$

В результате приходим к трансцендентному уравнению, которое качественно объясняет ряд явлений ферромагнетизма:

$$y = \mathrm{th}\left(\frac{\Theta}{T}y\right); \qquad \frac{T}{\Theta}x = \mathrm{th}\,x. \tag{34}$$

Действительно, как следует из (34) при $T \geq \Theta$ графики функций Tx/Θ и $\mathrm{th}\,x$ имеют только одну точку пересечения $x = 0$. Вычисляя вторую производную от F по y можно убедиться, что $x = 0$ не соответствует стационарному (устойчивому) состоянию ($F^{''} > 0$ - точка максимума, а не минимума). Однако при $T < \Theta$ есть 2 точки пересечения $x = 0$ и $x = x_0 \geq 0$. Точка $x = x_0$ удовлетворяет условию минимума F, а следовательно соответствует основному (устойчивому) состоянию.

Учет квантовых эффектов.

Последовательное объяснение ферромагнетизма без полного привлечения методов квантовой механики невозможно. Если выполнить квантовомеханический расчет для системы спинов во внешнем поле, что выходит за рамки данного курса, то уравнение (34) примет вид:

$$y = \mathrm{th}\left(\frac{\Theta}{T}y + \frac{\mu B}{kT}\right) = \mathrm{th}\left\{\frac{\mu}{kT}\left(\frac{k\Theta}{\mu}y + B\right)\right\}.$$

Это означает, что в веществе возникает дополнительное поле пропорциональное намагниченности $b\mathbf{M}$, где b - константа.

Таким образом на основании (32), намагниченность вещества примет вид:

$$\mathbf{M} = n\mu L\left(\mu\frac{B + bM}{kT}\right)\frac{\mathbf{B}}{B} \approx n\mu^2\frac{B + bM}{3kT}\frac{\mathbf{B}}{B},$$

где L -функция Ланжевена (...) Решая последнее равенство относительно $\mathbf{M}$ находим:

$$M = \frac{n\mu^2}{3kT(T - \Theta/3)}B.$$

Данное выражение объясняет появление температуры Кюри для ферромагнетика.

Литература

[1] *С.Р.де Гроот, Л.Г.Сатторп.* Электродинамика. М., Наука, 1982.

[2] *А.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов.* Движение заряженных частиц в электрических и мангитных полях. М., Наука, 1978.

[3] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Гидродинамика. М., Наука, 1986.

[4] *В.Г.Левич.* Курс теоретической физики. Том 1 М., Наука, 1969.

[5] *В. Карцев.* Приключения великих уравнений. М., Знание, 1986, 288 с.

[6] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. т.6. М., Мир, 1966, 343с.

[7] *Джексон.* Классическая электродинамика.

[8] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.

[9] *Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский.* Квантовая теория волнового момента. Ленинград, Наука, 1975.

[10] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.

[11] *М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин.* Классическая электродинамика. М., Наука, 1988.

Оглавление