§1 Условие квазистационарности поля

Квазистационарное переменное электромагнитное поле - это приближенный способ описания электромагнитного поля при котором можно пренебречь током смещения в системе уравнений Максвелла. Следовательно для возникновения квазистационарного поля должно выполняться условие:

$$\left|\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\right| \gg \left|\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right|; \qquad \left|\frac{4\pi}{c}\,\sigma\,\mathbf{E}\right| \gg \left|\frac{\varepsilon}{c}\,\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right|. \tag{1}$$

Здесь σ -проводимость вещества, а ε - диэлектрическая проницаемость.

Последнее неравенство получено для однородной изотропной среды и если поле периодически с частотой ω меняется во времени, то условие квазистационарности электромагнитного поля можно сформулировать неравенством:

$$\sigma \gg \omega\,\varepsilon; \qquad \omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon}. \tag{2}$$

Таким образом система уравнений Максвелла в квазистационарном приближении имеет вид:

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho; \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\,\mathbf{j}; \\ \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}; \qquad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}; \qquad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \end{gathered} \tag{3}$$

Переменное поле в проводнике определяется уравнением $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, в силу того, что объемная плотность заряда в проводнике за короткий промежуток времени исчезает $\rho = \rho_0 \exp(-t/\tau)$. Поэтому уравнения для определения векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют вид:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{4\pi\,\sigma\,\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0; \qquad \nabla^2\mathbf{H} - \frac{4\pi\,\sigma\,\mu}{c^2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0; \tag{4}$$

§2 Скин-эффект

Явление локализации переменного электромагнитного поля и тока внутри определенного объема проводника называется скин-эффектом.

Полубесконечный проводник

Рассмотрим для описания данного явления решение уравнений (4) для полубесконечного проводника по которому протекает ток вектор плотности которого направлен вдоль оси x $\mathbf{j} = \mathbf{i}\,j_x(x, y, z, t)$ (рис. 1). В силу бесконечной симметрии системы по оси y j_x не зависит от переменной y. В соответствии с законом сохранения заряда $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, j_x не зависит также и от переменной x. В результате:

$$\mathbf{j} = \mathbf{i}\,j_x(z,t); \qquad \mathbf{E} = \sigma\mathbf{j} = \mathbf{i}\,E_x(z,t)$$

Пусть для примера ток периодически зависит от времени

$$j_x(z,t) = j(z)\,\exp(i\omega\,t); \qquad E_x(z,t) = E(z)\,\exp(i\omega\,t). \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) получим уравнение для $E(z)$:

$$\frac{d^2E(z)}{dz^2} - i\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\,E(z) = 0$$

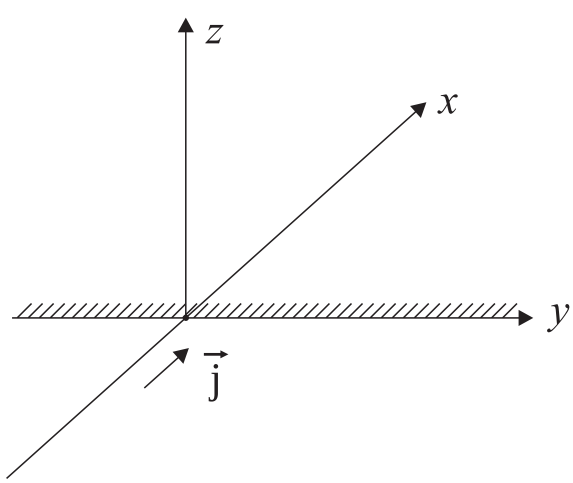

Рис. 1:

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$E(z) = A\,\exp(ikz) + B\,\exp(-ikz); \qquad k \equiv \sqrt{-i\frac{4\pi}{c^2}\sigma\,\mu\,\omega}, \tag{6}$$

где A и B произвольные константы.

Толщина скин слоя.

Если ввести обозначение

$$\delta \equiv \frac{c}{\sqrt{2\pi\,\sigma\,\mu\,\omega}}, \tag{7}$$

то решение уравнения (6) можно переписать следующим образом:

$$E(z) = A\,\exp\left[-i(1-i)\frac{z}{\delta}\right] + B\,\exp\left[i(1-i)\frac{z}{\delta}\right].$$

В последнем выражении следует выбрать константу B равной нулю, так как в противном случае в решении появится слагаемое, соответствующее нефизическому возрастанию поля на бесконечности от границы раздела.

Таким образом, поле и ток локализованы в основном в области, имеющей характерный размер δ по оси ортогональной направлению тока и границы раздела. Чем дальше от границы раздела, тем слабее поле и ток, при этом затухание увеличивается экспоненциально с ростом координаты z.

$$E_x(z) = A\,\exp\left(-i\frac{z}{\delta}\right)\,\exp\left(-\frac{z}{\delta}\right).$$

Принято называть толщину δ характерного размера области в которой локализуется поле скин-слоем, а само явление локализации переменного поля и тока внутри скин-слоя - скин-эффектом.

На основании закона электромагнитной индукции Фарадея $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu\dot{\mathbf{H}}/c$ следует, что вектор напряженности магнитного поля направлен параллельно оси y и напряженность магнитного поля равна:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{j}\frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\omega\frac{\mu}{c}\,\mathbf{H}; \qquad |H_y| \approx \frac{c}{\omega\delta}\,|E_x|.$$

Рассмотренный пример бесконечного проводника, занимающего полпространства выбран в качестве примера для простоты вычислений. Если рассмотреть цилиндрический проводник, то характер заключения не изменится. Также как и в прямолинейной геометрии получится, что поле и ток локализуются в цилиндрическом слое толщины δ (7).

Существенно, что толщина скин-слоя зависит от частоты тока ω. Так например, если взять медный проводник, по которому протекает ток частоты 50 герц, то $\delta \approx 1$ см. В то же время, если частота тока $\omega \approx 10^5$ герц, то $\delta \approx 10^{-3}$ см. Очевидно, что в случае постоянного тока $\omega = 0$ и $\delta = \infty$

§3 Система линейных проводников

Закон Ома в дифференциальной форме при наличии источников тока определяется выражением $\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E_s})$. Рассмотрим произвольный контур с током L. Для данного контура получим:

$$\oint_L \frac{1}{\sigma}\mathbf{j}\cdot d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \oint_L \mathbf{E_s}\cdot d\mathbf{l} \tag{8}$$

С учетом вспомогательного равенства

$$\oint_L \frac{1}{\sigma}\mathbf{j}\cdot d\mathbf{l} = \oint_L I\,dR = I\,R,$$

где I сила тока, а R - сопротивление контура, выражение (8) можно переписать в виде:

$$I\,R = \oint_L \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} + \varepsilon = -\oint_L \left(\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad}\varphi\right)\cdot\,d\mathbf{l} + \varepsilon = \tag{9}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\oint_L \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l} - \oint_L d\varphi + \varepsilon = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} - (\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon.$$

Здесь ε - электродвижущая сила, S поверхность для которой контур L является границей, а значения потенциалов φ_2 и φ_1 определяют потенциалы в точках разрыва цепи контура (конденсатор), если такие имеются.

Уравнения для системы проводников.

Учитывая определение емкости конденсатора $C = Q/(\varphi_2 - \varphi_1)$ вместо (9) получим соотношение для рассматриваемого контура с током:

$$I\,R = -\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi}{dt} - \frac{Q}{C} + \varepsilon. \qquad \Phi \equiv \int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}.$$

Здесь Φ поток вектора индукции магнитного поля через поверхность S для которой контур L является границей.

Пусть в общем случае имеется N штук контуров с токами, при этом в k-ом контуре протекает ток I_k, сопротивление контура обозначим R_k, а емкость C_k. В этом случае:

$$I_k\,R_k + \frac{1}{c}\,\frac{d\Phi_k}{dt} + \frac{Q_k}{C_k} = \varepsilon_k, \qquad k \in 1, 2...N. \tag{10}$$

Квазистационарное поле.

Покажем, что для квазистационарных токов поток вектора индукции магнитного поля через контур L_k определяется соотношением:

$$\Phi_k = c\sum_{i=1}^{N} L_{ki}\,I_i, \qquad k \in 1, 2...N. \tag{11}$$

Здесь L_{ki} -коэффициенты, зависящие от геометрии проводников с током и имеющие название коэффициентов взаимоиндукции при $i \neq k$ и коэффициентов самоиндукции при $k = i$.

Для доказательства учтем, что в квазистационарном приближении обобщенный закон Ампера совпадает с видом закона в стационарном магнитном поле $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\,\mathbf{j}/c$ и следовательно уравнение для векторного потенциала в случае однородной магнитоизотропной среды имеет вид, совпадающий с уравнением для стационарного магнитного поля

$$\nabla^2\,\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\frac{4\pi}{c}\,\mu\,\mathbf{j}(\mathbf{r}, t).$$

Решение данного уравнения в случае отсутствия специальных граничных условий имеет вид интеграла Пуассона:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{c}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,dv'.$$

Если ток линейный, то для векторного потенциала создаваемого линейным током в контуре L находим:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{c}\oint_L \frac{I(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\,d\mathbf{l}. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь два линейных тока I_1 и I_2, протекающих в контурах L_1 и L_2, соответственно. В этом случае поток вектора индукции магнитного поля через первый контур Φ_1 складывается из потока вектора индукции через первый контур, создаваемого вторым током $\phi_1(2)$ и потока вектора индукции через первый контур, создаваемого самим первым контуром $\phi_1(1)$.

Запишем по определению поток вектора индукции, создаваемого вторым током через первый контур

$$\phi_1(2) = \int_{S_1} \mathbf{B}_2\cdot d\mathbf{s}_1 = \int_{S_1} \mathrm{rot}\,\mathbf{A}_2\cdot d\mathbf{s}_1 = \oint_{L_1} \mathbf{A}_2(\mathbf{r}_1)\cdot\,d\mathbf{l}_1$$

Подставляя в полученное выражение на основании (12) значение векторного потенциала получим:

$$\phi_1(2) = \oint_{L_1} \left(\frac{\mu}{c} \oint_{L_2} \frac{I_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \, d\mathbf{l}_2 \right) \, d\mathbf{l}_1 \equiv c \, L_{12} \, I_2, \tag{13}$$

где

$$L_{12} \equiv \frac{\mu}{c^2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

-коэффициенты взаимоиндукции. По аналогии с (13) поток вектора индукции через первый контур, создаваемый током в первом контуре можно записать в виде:

$$\phi_1(1) = c \, L_{11} \, I_1. \tag{14}$$

Здесь L_{11} коэффициент самоиндукции или просто индуктивность контура. В результате, для потока вектора индукции магнитного поля через первый контур на основании (13), (14) получим:

$$\Phi_1 = c \sum_{i=1}^{2} L_{1i} \, I_i. \tag{15}$$

Полностью аналогично находится выражение для потока вектора индукции через второй контур.

Рассматривая таким же образом произвольное число контуров с токов получаем выражение (11), что и требовалось доказать.

Система проводников для квазистационарного поля.

Таким образом система уравнений (10) в квазистационарном приближении существенно упрощается и имеет вид:

$$I_k \, R_k + \sum_{i=1}^{N} L_{ki} \, \frac{dI_i}{dt} + \frac{Q_k}{C_k} = \varepsilon_k, \qquad k \in 1, 2 ... N. \tag{16}$$

Контур с током.

Рассмотрим для примера один контур с током, содержащий сопротивление R, индуктивность L и емкость . В соответствии с (16) уравнение в этом случае имеет вид:

$$R \, I + L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon. \tag{17}$$

Дифференцируя данное уравнение по времени, получим дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами для определения силы тока в контуре:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \, \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \, I = \frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{18}$$

Общий случай уравнения (18) можно рассмотреть выбрав зависимость от времени ε в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \, \exp(-i\omega t).$$

Такая зависимость от времени источника тока означает, что и сила тока имеет следующую зависимость от времени $I = I_0 \, \exp(-i\omega t)$. В результате вместо (18) получаем алгебраическое уравнение:

$$Z \, I = \varepsilon; \qquad Z \equiv R - i \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right). \tag{19}$$

В данном соотношении Z комплексное сопротивление или имеданс. Решение уравнения (19) есть:

$$I = \mathrm{Re} \, \frac{\varepsilon}{Z} = \mathrm{Re} \, \frac{\varepsilon_0 \, \exp(-i\omega t)}{|Z| \, \exp(i\alpha)}; \qquad \mathrm{tg} \, \alpha \equiv \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Другими словами

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \tag{20}$$

Из (20) вытекает:

1. сила тока сдвинута по фазе относительно фазы источника напряжения;

2. если источник тока отключен $\varepsilon = 0$, то ток в в контуре совершает колебания, частота которых определяется условием $Z = 0$. Данное условие приводит к алгебраическому уравнению второго порядка:

$$R - i\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right) = 0.$$

Решение данного уравнения есть:

$$\omega = -i\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \tag{21}$$

Как следует из (21) если подкоренное выражение отрицательно, то в цепи возникает затухающий апериодический разряд в силу мнимости величины ω. Если подкоренное выражение положительно, то в цепи возбуждаются затухающие во времени по закону $\exp(-Rt/2L)$ периодические колебания. Наконец, если в цепи нет сопротивления, то устанавливаются незатухающие периодические колебания с периодом T равным (формула Томсона):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Литература

[1] *С.Р.де Гроот, Л.Г.Сатторп.* Электродинамика. М., Наука, 1982.

[2] *А.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов.* Движение заряженных частиц в электрических и мангитных полях. М., Наука, 1978.

[3] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Гидродинамика. М., Наука, 1986.

[4] *В.Г.Левич.* Курс теоретической физики. Том 1 М., Наука, 1969.

[5] *В. Карцев.* Приключения великих уравнений. М., Знание, 1986, 288 с.

[6] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. т.6. М., Мир, 1966, 343с.

[7] *Джексон.* Классическая электродинамика.

[8] *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.

[9] *Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский.* Квантовая теория волнового момента. Ленинград, Наука, 1975.

[10] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.

[11] *М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин.* Классическая электродинамика. М., Наука, 1988.

Оглавление