

§1 Потенциалы Лиенара–Вихерта.

Переменное электромагнитное поле создается системой произвольно движущихся зарядов или переменными во времени токами. В этом случае все характеристики в распределении зарядов и токов, а также функции характеризующие поле являются функциями времени.

Точечный заряд.

Рассмотрим поле произвольно движущегося точечного заряда e . Пусть траектория движения заряда задана радиус-вектором $\mathbf{r}_e(t)$. Уравнения, определяющие скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы электромагнитного поля, записываются в следующем виде:

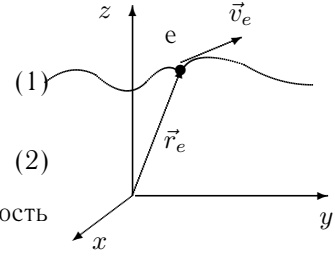
$$\square \varphi = \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t); \quad (1)$$

$$\square \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Для точечного заряда e объемная плотность заряда ρ и объемная плотность тока \mathbf{j} равны:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)); \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho \mathbf{v} = \mathbf{v} e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t)), \quad (3)$$

где $\mathbf{r}_e(t)$ – радиус-вектор заряда e , а \mathbf{r} – радиус вектор произвольной точки в пространстве, Рис. 1:



Запаздывающий потенциал.

Решение неоднородного волнового уравнения (1) может быть записано следующим образом:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (4)$$

Представленное решение уравнения (1) соответствует запаздывающему решению волнового уравнения, которое выбирается для удовлетворения принципа причинности. То есть поле в произвольной точке пространства в момент времени t создается зарядом в момент времени $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$, предшествующий моменту времени наблюдения на величину времени запаздывания, необходимого для того, чтобы электромагнитное поле дошло от точки расположения заряда \mathbf{r}' до произвольной точки наблюдения \mathbf{r} .

Введем для упрощения вычисления интеграла (4) дополнительное интегрирование по времени t' , в результате получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) dv' dt'. \quad (5)$$

Подставим выражение для $\rho(\mathbf{r}', t')$ из (3) в (5) и проинтегрируем по пространственным переменным вектора \mathbf{r}' :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{e \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_e(t'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) dv' dt' = \\ &= \int \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} \delta\left(-t' + t - \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|\right) dt' \end{aligned} \quad (6)$$

Для вычисления последнего интеграла необходимо использовать правило вычисления интегралов от дельта-функции Дирака сложного аргумента $\int f(t) \delta(\varphi(t)) dt$.

Вспомогательное равенство.

Общее правило вычисления таких интегралов основывается на соотношении, которое выведено в теории обобщенных функций

$$\delta(\phi(t)) = \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{\left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=t_i}}, \quad (7)$$

где t_i - корни уравнения $\phi(t) = 0$.

Таким образом для вычисления интеграла (6) необходимо найти решение уравнения:

$$\phi(t') = t' - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = 0. \quad (8)$$

Обозначим корень уравнения (8) через ξ . То есть при $t' = \xi$, $\phi(\xi) = 0$.

$$\xi = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)|$$

Найдем теперь выражение для частной производной в (7) с учетом явного выражения для ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(t')}{\partial t'} &= 1 + \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| \right\} = 1 + \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \frac{1}{c} \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_e(t') + r_e^2(t')} \right\} = \\ &= 1 - \frac{\mathbf{v}_e(t')}{c} \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} = 1 - \frac{1}{c} \mathbf{v}_e(t') \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R} \left(R - \frac{1}{c} \mathbf{v}(t') \cdot \mathbf{R} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')| = \mathbf{R}/R$ - единичный вектор, а $\mathbf{v}_e(t')$ - скорость движения частицы. Следовательно выражение (6) можно представить в виде:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t')|} \frac{\delta(t' - \xi)}{\left| 1 - \frac{1}{c} \mathbf{v}_e(t') \cdot \mathbf{n}(t') \right|} dt' = \frac{e}{R(\xi) - \frac{1}{c} \mathbf{v}(\xi) \cdot \mathbf{R}(\xi)}.$$

Скалярный потенциал.

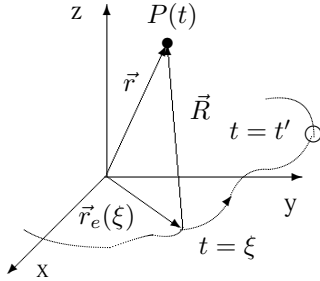


Рис. 2:

На основании изложенного значение скалярного потенциала в точке с радиус-вектором \mathbf{r} в момент времени ξ , являющийся корнем уравнения $\xi - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)| = 0$ определяется выражением:

$$\varphi(\mathbf{r}, \xi) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)|} \cdot \frac{1}{(1 - \mathbf{v}(\xi) \cdot \mathbf{n}/c)}, \quad (10)$$

При скорости $\mathbf{v}(\xi) \ll c \Rightarrow \varphi(\mathbf{r}, \xi) = e/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)|$, то есть совпадает с электростатическим значением потенциала.

Векторный потенциал.

Для векторного потенциала \mathbf{A} (по аналогии с φ) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right) dv' dt', \quad \mathbf{j} = \mathbf{v} \rho, \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, \xi) &= \frac{e\mathbf{v}(\xi)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)|} \frac{1}{(1 - (\mathbf{v}(\xi) \cdot \mathbf{n})/c)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) для $\varphi(\mathbf{r}, \xi)$ и $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \xi)$ называются потенциалами Лиенара - Вихерта.

Векторы поля.

Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\xi)$ и $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$, тогда напряженности полей можно найти по определению исходя из значений скалярного и векторного потенциалов:

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2/c^2)(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c)}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} + \frac{e[\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}}]]}{c^2 R(1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$$

В представленных выражениях для электромагнитного поля в отличие от статических полей появились слагаемые, убывающие на больших расстояниях от системы как r^{-1} .

Выводы.

Два важных следствия вытекают из (12)

1. Если заряд движется с $\mathbf{v} = const$, тогда $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$ и следовательно слагаемое в выражении для \mathbf{E} , имеющее на больших расстояниях асимптоту $\sim r^{-1}$ появляется только для ускоренно движущихся частиц. Для частиц, движущихся с постоянной скоростью поле равно:

$$\mathbf{E} = \frac{e(1 - v^2/c^2)(\mathbf{n} - v/c)}{R^2(1 - \mathbf{n} \cdot v/c)^3}, \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}].$$

2. При $R \rightarrow \infty$ и $v \ll c$ выражение для поля примет вид:

$$\mathbf{E} \approx \frac{e[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}}]]}{c^2 R} = \frac{[\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]]}{c^2 R}; \quad \mathbf{B} = [\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$$

§2 Вибратор Герца.

Рассмотрим задачу о переменном электромагнитном поле, создаваемом зависящим от времени диполем $\mathbf{d}(t)$. Прототипом зависящего от времени диполя являются два равных, но разноименных заряда находящиеся на расстоянии l друг от друга, величина которых меняется с течением времени. Если размеры диполя l малы по сравнению с размерами выбранной системы, то можно использовать модельное понятие о точечном диполе.

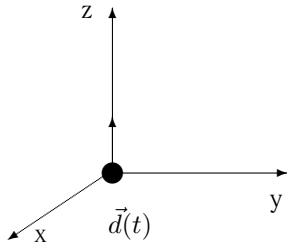


Рис. 3:

Переменный во времени точечный диполь, расположенный в начале координат, называется вибратором Герца. В соответствии с общей теорией электромагнитного поля, поле такой системы удобно вычислить с использованием векторов Герца. Дипольный и магнитный моменты единицы объема системы, состоящей из одного точечного диполя расположенного в начале координат, имеют вид:

$$\mathbf{P} = \mathbf{d}(t)\delta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{M} = 0.$$

Векторы Герца.

Вектор Герца магнитного типа в этом случае равен нулю, а вектор Герца электрического типа удовлетворяет уравнению:

$$\square \vec{\Pi}_e \equiv \nabla^2 \vec{\Pi}_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}_e}{\partial t^2} = -4\pi \vec{P}. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) имеет вид:

$$\vec{\Pi}_e(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{\mathbf{d}(t - r/c)}{r}. \quad (14)$$

Общие определения, устанавливающие связь векторов Герца с напряженностями полей определяются равенствами:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -4\pi \mathbf{P} + \text{rot rot } \vec{\Pi}_e - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{\Pi}_m), \\ \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \\ \mathbf{B} = \text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} - \text{rot } \vec{\Pi}_m \right), \\ \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}. \end{cases}$$

Поле вибратора Герца.

Отсюда следует, что поле диполя в любой точке пространства, кроме начала координат, определяется следующими выражениями:

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \vec{\Pi}_e = \mathbf{D}; \quad \mathbf{B} = \text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\Pi}_e}{\partial t} \right) = \mathbf{H}.$$

Используя явное выражение (14) для вектора Герца электрического типа, после векторных преобразований находим явные выражения для векторов полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}(\tau)) - \mathbf{d}(\tau)}{r^3} + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}(\tau)) - \dot{\mathbf{d}}(\tau)}{c r^2} + \frac{1}{c^2 r} \left[\mathbf{n} \times \left[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}(\tau) \right] \right], \quad (15)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = -\frac{1}{c r^2} \left[\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{d}}(\tau) \right] - \frac{1}{c^2 r} \left[\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}(\tau) \right],$$

здесь \mathbf{n} - единичный радиус вектор в направлении точки наблюдения поля $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\tau = t - r/c$ - время запаздывания.

Структура поля вибратора Герца.

Как следует из (15) полученные выражения можно разбить на слагаемые трех типов в зависимости от расстояния до точки наблюдения. Это слагаемые пропорциональные $\sim r^{-3}$, $\sim r^{-2}$ и $\sim r^{-1}$. Обозначим слагаемые, входящие в (15), содержащие различные степени r в знаменателях через $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{E}^{(2)}$ и $\mathbf{B}^{(0)} \equiv 0$, $\mathbf{B}^{(1)}$, $\mathbf{B}^{(2)}$, соответственно. Следовательно в пространстве можно выделить три области и записать векторы напряженности и индукции в виде суммы трех слагаемых:

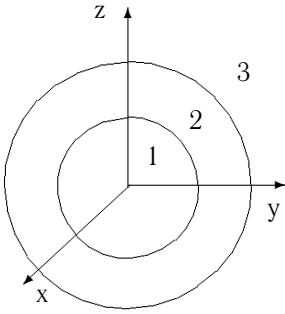


Рис. 4:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)}, \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)}. \end{cases}$$

Первая область, которая носит название **ближняя зона**, определяется тем, что поле в этой области $\sim r^{-3}$ (рис. 4). Эта область возникает на малых расстояниях и как следует из (15) основной вклад в поле определяется слагаемым $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{B}^{(0)} \equiv 0$. Вторая область - **промежуточная зона** - это область в которой все слагаемые дают одинаковый вклад в величину поля. И наконец третья область, которая носит название **волновая зона** - это область пространства удаленная от начала координат, в которой поле $\sim r^{-1}$. Как следует из (15) основной вклад в величину поля, в этом случае, определяется слагаемыми $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{B}^{(2)}$.

Использование выше понятия близко - далеко от точечного диполя можно сформулировать в конкретных физических условиях. Очевидно, что в ближней зоне выполняется неравенство $|\mathbf{E}^{(0)}| \gg |\mathbf{E}^{(1)}|$, то есть $|\mathbf{d}/r^3| \gg |\dot{\mathbf{d}}/c r^2|$. Если диполь описывается периодической функцией: $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$, тогда $|\dot{\mathbf{d}}/c r^2| \equiv |\omega \mathbf{d}_0 / c r^2|$ и в ближней зоне имеем: $r^{-1} \gg \omega/c$. То есть ближняя зона возникает на расстояниях $r \ll c/\omega$.

В волновой зоне $|\mathbf{E}^{(2)}| \gg |\mathbf{E}^{(1)}|$ и при $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \cos(\omega t)$ имеем: $|\omega^2 \mathbf{d}_0 / c^2 r| \gg |\omega \mathbf{d}_0 / c r^2| \Rightarrow \omega/c \gg r^{-1}$. То есть волновая зона возникает на расстояниях $r \gg c/\omega$ от точечного диполя.

Пример.

В качестве модельного примера рассмотрим простую электрическую розетку переменного тока у которой $\omega \simeq 50$. Расстояние на которых возникает волновая зона у такой системы равно:

$$r \gg \frac{3 \cdot 10^{10}}{50} \sim 10^9 = 10^7 = 10^4 = 10000.$$

Следовательно расстояние на котором поле обыкновенной розетки имеет структуру и величину характерную для волновой зоны приближенно равно расстоянию до Луны. Однако, если, например, $\omega \sim 10^6 \div 10^7$, то волновая зона возникает уже на расстояниях порядка сотен метров. Таким образом, в зависимости от частоты изменения диполя во времени существенно зависит область появления волновой зоны.

§3 Поле вибратора Герца в волновой зоне.

Поле в волновой зоне определяется слагаемыми $\mathbf{E}^{(2)}$ и $\mathbf{B}^{(2)}$, имеющими асимптотику $1/r$. Так для $\mathbf{B}^{(2)}$ на основании (15) имеем:

$$\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}^{(2)} = -\frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}].$$

Вычислим векторное произведение в системе координат $x'y'z'$ (см. рис. 5)

В результате:

$$\mathbf{B}^{(2)} = -\frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}] = -\frac{1}{c^2 r} \begin{vmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \\ 0 & 0 & \ddot{d}(\tau) \end{vmatrix} = -\frac{1}{c^2 r} \mathbf{i}' \ddot{d}(\tau) \sin \theta.$$

Таким образом касательная к окружности, лежащей в плоскости параллельной плоскости xy определяет направление

$\mathbf{B}^{(2)}$. Для определения направления вектора $\mathbf{E}^{(2)}$, вычислим векторное произведение: $\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}]] = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}^{(2)}]$, в системе координат с осями x'', y'', z'' (см. рис. 5):

$$\mathbf{E}^{(2)} = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}^{(2)}] = - \begin{vmatrix} \mathbf{i}'' & \mathbf{j}'' & \mathbf{k}'' \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & B^{(2)} & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}'' (-B^{(2)}) = \mathbf{i}'' B^{(2)}. \quad (16)$$

Следовательно вектор напряженности $\mathbf{E}^{(2)}$ направлен в положительном направлении оси x'' и таким образом векторы $\mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{n}, \mathbf{B}^{(2)}$ образуют тройку взаимноортогональных векторов, при этом:

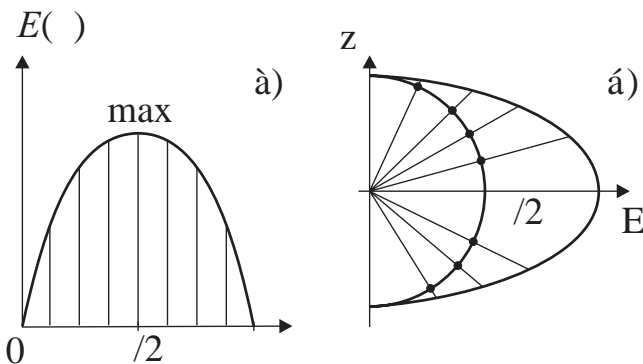


Рис. 6:

вектором дипольного момента и радиус-вектора изображают в сферической системе координат и называют диаграммой углового распределения (рис. 6б).

§4 Мощность излучения.

Для переменного электромагнитного поля вектор Умова–Пойнтинга, характеризует количество энергии проходящей через единичную площадку в единицу времени:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}].$$

Количество энергии проходящей через площадку $d\sigma$ в единицу времени есть $(\mathbf{S} \cdot d\vec{\sigma})$.

Мощность излучения в волновой зоне.

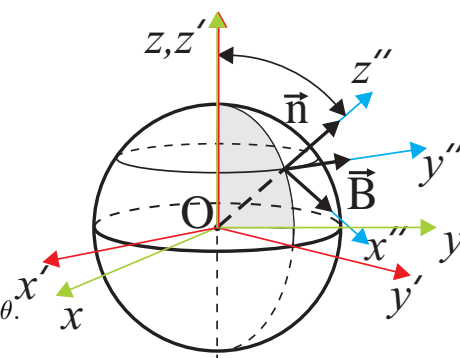


Рис. 5:

$$|\mathbf{E}^{(2)}| = |\mathbf{B}^{(2)}| = \frac{1}{c^2 r} \ddot{d}(\tau) \sin \theta.$$

Если изобразить график зависимости напряжённости поля \mathbf{E} от угла θ , то он будет иметь вид (рис.6а). В плоскости ортогональной вектору дипольного момента значение поля максимально и оно равно 0 в направлении дипольного момента. То есть значение поля зависит от угла между направлением вектора дипольного момента и направлением радиус-вектора в точку наблюдения. Часто зависимость величины поля от угла между

В соответствии с определениями классической механики изменение энергии в единицу времени называется мощностью. Выделим сферическую поверхность радиуса r в волновой зоне и подсчитаем количество энергии \mathcal{E} проходящей через эту поверхность в единицу времени:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oint_r (\mathbf{S} \cdot d\vec{\sigma}) = -\frac{c}{4\pi} \oint_r \left(\left[\mathbf{n} \times \mathbf{B}^{(2)} \right] \times \mathbf{B}^{(2)} \right) \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Здесь используется связь (16) между векторами $\mathbf{E}^{(2)}$ и $\mathbf{B}^{(2)}$.

Элемент поверхности можно выразить через элемент телесного угла $d\sigma = r^2 d\Omega$. Раскрывая двойное векторное произведение, получим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c}{2\pi} \oint \left\{ \mathbf{n} B^{(2)2} - \mathbf{B}^{(2)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(2)}) \right\} \cdot \mathbf{n} r^2 d\Omega. \quad (17)$$

Так как в волновой зоне векторы \mathbf{n} , $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{B}^{(2)}$ ортогональны, следовательно $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}^{(2)}) = 0$. Поэтому для выражения (17) имеем:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c}{4\pi} \oint \left| \frac{1}{c^2 r} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}] \right|^2 r^2 d\Omega. \quad (18)$$

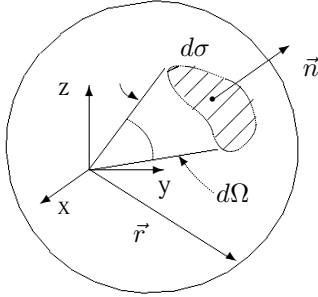


Рис. 7:

Если радиус сферы $r \rightarrow \infty$, тогда существует конечный, не равный нулю предел $\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)$. Таким образом свойства переменного электромагнитного поля вибратора Герца таковы, что энергия поля или сигнал может передаваться полем на бесконечно большое расстояние. Если учитывать слагаемые поля промежуточной и ближней зоны, то есть слагаемые содержащие $1/r^2$ и $1/r^3$, то в случае $r \rightarrow \infty$ они дадут нулевой вклад в энергию передаваемую на бесконечно большие расстояния. Таким образом при $r \rightarrow \infty$ ненулевой вклад в передаваемую энергию дают только слагаемые, определяющие поле в волновой зоне $E^{(2)}$ и $B^{(2)}$. Создание и передача энергии электромагнитного поля на большие расстояния называется процессом излучения электромагнитного поля.

Угловое распределение излучения.

Формулу (18) можно переписать в виде:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \oint_S I(\theta) d\Omega. \quad (19)$$

Тогда физический смысл функции $I(\theta)$ — это энергия, которая распространяется в единицу времени внутри телесного угла $d\Omega$. Иными словами $I(\theta)$ — угловое распределение излучения. В случае точечного диполя находящегося в начале системы координат функция углового распределения излучения имеет вид:

$$I(\theta) = \frac{1}{4\pi c^3} \left| [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}] \right|^2. \quad (20)$$

Вычислим (18) в явном виде:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{d}^2(\tau) \sin^2 \theta \cdot \sin \theta \, d\theta d\varphi.$$

Мощность дипольного излучения.

Сделав замену переменной интегрирования $\cos \theta = x \Rightarrow dx = -\sin \theta \, d\theta$, для энергии, излученной дипольным моментом в единицу времени или интенсивности излучения получим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2\pi \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{d}^2(\tau) \int_{-1}^1 (1-x^2) \, dx = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2(\tau); \quad \tau = t - \frac{r}{c}. \quad (21)$$

Рассмотрим некоторые простейшие примеры использования формулы (21) для величины интенсивности излучения электромагнитного поля.

Точечный заряд.

Как следует из (21) энергия излученная дипольным моментом в единицу времени определяется второй производной по времени от дипольного момента системы. Это означает, в частности, что если заряженная частица движется с ускорением, то она излучает электромагнитное поле, так как дипольный момент такой частицы $\mathbf{d} = q\mathbf{r}$. Данный результат следует также и из выражения для потенциалов Лиенара - Вихерта.

Пусть заряд q движется с ускорением \mathbf{a} , тогда:

$$\mathbf{d} = q\mathbf{r}; \quad \ddot{\mathbf{d}} = q\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{a},$$

где \mathbf{a} - ускорение частицы. На основании (21) для интенсивности излучения таким зарядом получим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2q^2a^2}{3c^3}.$$

При выводе этого выражения использованы кинематические определения классической механики Ньютона, справедливой при скоростях движения \mathbf{v} , удовлетворяющих условию $v \ll c$. Если воспользоваться выражениями для потенциалов Лиенара-Вихерта, при выводе которых не предполагалась малость скорости движения частицы, то повторяя вывод для интенсивности излучения с составляющими поля пропорциональными r^{-1} , можно получить интенсивности излучения заряженной частицы движущейся с произвольной скоростью.

Дипольный момент.

Зависящий от времени дипольный момент меняется с частотой ω , то есть $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \sin(\omega t)$. Тогда на основании (21) интенсивность излучения такой системы равна:

$$I = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \omega^4 d_0^2 \sin^2 \omega(t - r/c).$$

В полученном выражении осталась зависимость от времени. Если это выражение усреднить за период изменения дипольного момента, можно получить среднюю величину интенсивности не зависящую от времени:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} dt = \frac{2}{3c^3} \omega^4 d_0^2 \langle \sin^2(\omega(t - r/c)) \rangle.$$

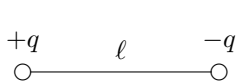
Так как $\langle \sin^2(\omega(t - r/c)) \rangle = 1/2$, окончательно находим:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = \frac{\omega^4}{3c^3} d_0^2 \sim \frac{1}{\lambda^4}, \quad (22)$$

где λ - длина волны излученного электромагнитного поля. $\omega = 2\pi/T = 2\pi c/\lambda$.

Линейный проводник.

Рассмотрим проводник длины ℓ к которому подводится переменное напряжение, тогда на концах проводника будут возникать зависящие от времени заряды $+q$ и $-q$. Такую систему можно заменить диполем с дипольным моментом $d = eq$. В результате:



$$d = \ell q; \quad \dot{d} = \ell \dot{q} = \ell I; \quad \ddot{d} = \ell \ddot{I},$$

где I сила тока в проводнике $I = I_0 \sin(\omega t)$. Такой проводник является примитивной антенной, то есть он излучает электромагнитное поле и энергия излучения этой антенны, усредненная за период колебания тока равна:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right\rangle = \frac{2}{3c^3} \ell^2 \langle \dot{I}^2 \rangle = \frac{2}{3c^3} \ell^2 \cdot I_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} \sim \frac{1}{\lambda^2}.$$

Из полученного выражения видно, что такая антенна излучает тем больше энергии, чем меньше длина волны излучения λ .

Точечный магнитный момент.

Для точечного дипольного момента \mathbf{d} , расположенного в начале координат векторы Герца удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \square \vec{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P}, & \text{где } \mathbf{P} = \mathbf{d}\delta(\mathbf{r}) \\ \square \vec{\Pi}_m = -4\pi \mathbf{M}, & \text{где } \mathbf{M} = 0. \end{cases}$$

При этом $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \text{rot rot } \vec{\Pi}_e$.

Если в начале координат находится точечный магнитный момент $\vec{\mu}$, то векторы Герца удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \square \vec{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P}, & \text{где } \mathbf{P} = 0 \\ \square \vec{\Pi}_m = -4\pi \mathbf{M}, & \text{где } \mathbf{M} = \vec{\mu}(t)\delta(\mathbf{r}). \end{cases}$$

При этом $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \text{rot rot } \vec{\Pi}_m$. Следовательно в случае точечного магнитного момента все формулы окажутся абсолютно симметричными относительно замены $\mathbf{d} \rightarrow \vec{\mu}$. Интенсивность излучения точечного магнитного момента определяется аналогично (19), называется интенсивностью магнитно-дипольного излучения и имеет вид:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mu}^2(\tau), \quad \tau = t - \frac{r}{c}. \quad (23)$$

Интенсивность магнитно-дипольного излучения на много порядков меньше, чем интенсивность электрически дипольного излучения, так как определение магнитного момента системы токов содержит c^{-1} :

§5 Общая теория излучения.

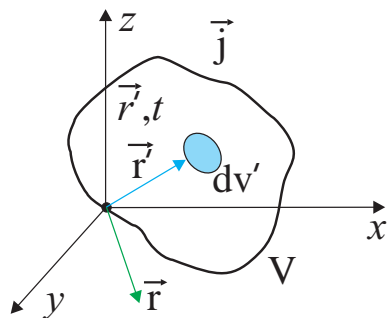


Рис. 8:

В предыдущих параграфах получены выражения для интенсивности излучения двух специальных систем - точечный дипольный момент, и точечный магнитный момент. Рассмотрим теперь произвольную замкнутую систему зарядов и токов и определим интенсивность излучения такой системы.

В произвольном случае скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям:

$$\square \varphi = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t); \quad \square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$$

Запаздывающие потенциалы

Решение уравнения для скалярного потенциала, удовлетворяющее принципу причинности (запаздывающий потенциал) имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (24)$$

Волновая зона.

Как следует из предыдущего рассмотрения при определении интенсивности излучения интерес представляют составляющие поля, имеющие асимптотическое поведение на больших расстояниях порядка $\sim 1/r$, так как остальные слагаемые вклада в интенсивность излучения не вносят. Поэтому точное решение (24) можно разложить в ряд по параметру $r'/r \ll 1$, так как в волновой зоне $r \gg r'$.

Разложение в ряд $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ есть:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2} = r \left(1 - 2\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} \simeq r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right).$$

С учетом данного разложения, запаздывающий аргумент плотности распределения заряда ρ может быть представлен в виде:

$$\rho \simeq \rho \left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) + \dots \right) = \rho \left(\mathbf{r}', \tau - \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{cr} \dots \right),$$

Здесь $\tau \equiv t - r/c$ – время запаздывания.

Время за которое поле пройдет через систему равно $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' / cr$. Так как точка наблюдения находится далеко от системы (т.е. $r \gg r'$), то параметр $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' / cr \ll \tau$ и функцию ρ можно разложить в ряд по параметру малости $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' / cr$, в результате:

$$\rho \left(\mathbf{r}', \tau + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \right) \approx \rho(\mathbf{r}', \tau) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau^2} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} \right)^2 + \dots$$

Такое разложение сходится, если скорость изменения плотности заряда не является быстро осциллирующей функцией времени и приводит к разложению по обратным степеням скорости света. Другими словами помимо выделения слагаемых соответствующих полю волновой зоны в точном решении появляется разложение по второму параметру малости - отношению скорости движения зарядов системы к скорости света. Таким образом выражение (24) для скалярного потенциала может быть переписано в виде:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \dots \right) \left\{ \rho(\mathbf{r}', \tau) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} + \dots \right\} dv'.$$

Первое приближение.

Если в представленном разложении ограничиться первыми неисчезающими членами по параметру малости содержащему скорость света, то получим:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{r} \int \rho(\mathbf{r}', \tau) dv' + \frac{1}{r} \int \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}'}{c} \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} dV' \dots$$

Здесь $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Скалярный потенциал.

Для электронейтральной системы $Q = 0$, поэтому в данном приближении находим окончательно для скалярного потенциала:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{\mathbf{n}}{cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', \tau) dv' = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}(\tau)}{cr}, \quad (25)$$

где $\mathbf{d}(\tau) = \int_V \mathbf{r}' \rho dv'$ – дипольный момент системы в момент времени τ .

Векторный потенциал.

Решение волнового уравнения для векторного потенциала \mathbf{A} имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

Разложим плотность тока, аналогично плотности заряда и представим его в виде:

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', \tau + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr}\right) = \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) + \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} + \dots \quad (26)$$

Оставляя только первый не исчезающий член в разложении (26), будем иметь:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \frac{1}{cr} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) dv' \quad (27)$$

Для дальнейших преобразований вычислим производную от дипольного момента по времени τ , которую с учетом закона сохранения заряда представим в виде:

$$\dot{\mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \tau} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', \tau) dv' = \int \mathbf{r}' \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} dv' = - \int \mathbf{r}' \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) dv'$$

Представив вектор \mathbf{r}' в декартовых координатах, докажем следующее соотношение:

$$\dot{\mathbf{d}} = - \int (\mathbf{i}x' + \mathbf{j}y' + \mathbf{k}z') \operatorname{div} \mathbf{j} dv' = \int \mathbf{j}(\tau) dv'. \quad (28)$$

Рассмотрим тождественное преобразование :

$$\int x' \operatorname{div} \mathbf{j} dv' = - \int \operatorname{div} (x' \mathbf{j}) dv' + \int j_x dv',$$

которое вытекает из тождества $\operatorname{div} (x' \mathbf{j}) = \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} x' + x' \operatorname{div} \mathbf{j}$. По теореме Остроградского-Гаусса, интеграл по объему замкнутой системы зарядов и токов содержащий $\operatorname{div} (x' \mathbf{j})$ можно свести к интегралу по поверхности, ограничивающей данную систему, а нормальная составляющая плотности тока на поверхности равна нулю, следовательно $\int \operatorname{div} (x' \mathbf{j}) dv' = 0$. В результате получим вспомогательное равенство:

$$\int x' \operatorname{div} \mathbf{j} dv' = \int j_x dv'.$$

Аналогичные преобразования для проекций y' и z' приводят к доказательству равенства (28)

Поле в первом приближении.

Таким образом в рассматриваемом приближении для скалярного и векторного потенциалов находим:

$$\varphi \simeq \frac{\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr}; \quad \mathbf{A} \simeq \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr}. \quad (29)$$

Из найденных выражений для \mathbf{A} и φ вытекает, что они удовлетворяют условию калибровки Лоренца. При вычислении напряженности поля и вектора индукции на основе (29) необходимо удерживать только члены порядка r^{-1} , которые будут появляться при дифференцировании вектора дипольного момента, но не знаменателей данных выражений. В результате:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi = \dots = -[\mathbf{n} \times \mathbf{B}],$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \dots = -\frac{1}{cr} [\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{d}}(\tau)]$$

Найденные выражения точно совпадают с выражениями для $\mathbf{E}^{(2)}$ и $\mathbf{B}^{(2)}$ (15), полученными для поля вибратора Герца в волновой зоне. Таким образом интенсивность излучения в данном приближении вычисляется так же как и для вибратора Герца, равна (21) и называется интенсивностью электрически дипольного излучения.

Второе приближение.

Учтем теперь второй член разложения (26), который в сравнении с первым членом разложения содержит малость c^{-1} . Преобразуем это слагаемое тождественно:

$$\frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')}{c} \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}' \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2c} \left[[\mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}' \tau)}{\partial \tau}] \times \mathbf{n} \right] + \frac{1}{2c} \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}' \tau)}{\partial \tau} + (\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}' \tau)}{\partial \tau}) \mathbf{r}' \right\},$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. В результате дополнительное слагаемое в векторном потенциале принимает следующий вид:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2c} [\dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}] + \frac{1}{2c^2 r} \frac{\partial}{\partial \tau} \int \left\{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \mathbf{r}' \right\} dv',$$

здесь $\boldsymbol{\mu}$ – магнитный момент системы токов, $\dot{\boldsymbol{\mu}}$ – производная по времени от магнитного момента. Дальнейшие преобразования полученного выражения приводят к следующему выражению для дополнительного векторного потенциала в волновой зоне:

$$\mathbf{A} = \frac{[\dot{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{n}]}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}}{6c^2 r} + \frac{\mathbf{n}}{6c^2 r} \int \ddot{\rho}(\mathbf{r}', \tau) r'^2 dv',$$

здесь компоненты вектора \mathbf{Q} определены с использованием компонент тензора квадрупольного момента Q_{ik} , $i, k \in 1, 2, 3$: $Q_i = \sum_{k=1}^3 Q_{ik} n_k$. Найденное выражение для векторного потенциала приводит к следующим выражениям для векторов напряженности электрического поля и вектора индукции магнитного поля [11]:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{r c^2} \left\{ [\mathbf{n} \times \ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau)] + \frac{1}{6c} [[\ddot{\mathbf{Q}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}], \right\}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r c^2} \left\{ [[\dot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}] + \frac{1}{6c} [\ddot{\mathbf{Q}}(\tau) \times \mathbf{n}] \right\}.$$

Интенсивность излучения.

Вычисляя с полученными выражениями полную интенсивность излучения, после преобразований, с учетом интенсивности электрически дипольного излучения получим следующее выражение определяющее интенсивности электрического дипольного, магнитно-дипольного и электрически-квадрупольного излучений:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2(\tau) + \frac{2}{3c^3} \dot{\boldsymbol{\mu}}^2(\tau) + \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \left(\frac{\partial^3 Q_{\alpha\beta}}{\partial \tau^3}(\tau) \right)^2 + \dots \quad (30)$$

Мультипольное разложение.

В общем случае это бесконечный ряд слагаемых по возрастающим степеням c^{-1} и вклад последующих членов ряда намного порядков меньше предыдущих. Наибольшим в этом ряду является слагаемое, соответствующее электрически-дипольному излучению. Для удобства используются следующие обозначения для отдельных членов этого ряда (30):

$$I = E1 + M1 + E2 + M2 + E3 + \dots$$

где I – полная интенсивность излучения системы, $E1$ – интенсивность электрически-дипольного излучения, $M1$ – интенсивность магнитно-дипольного излучения, $E2$ – интенсивность электрически-квадрупольного излучения, $M2$ – интенсивность магнитно-квадрупольного излучения, $E3$ – интенсивность электрически-октупольного излучения и так далее.

Систем, которые не имели бы ни \mathbf{d} , ни $\dot{\boldsymbol{\mu}}$, ни $Q_{\alpha\beta}$ практически нет, поэтому наибольший вклад в величину интенсивности излучения произвольной системы вносят первые три члена ряда (30).

§6 Реакция излучения. Сила реакции излучения.

Система зарядов и токов, излучающая электромагнитное поле передает полю энергию и импульс. Таким образом по законам сохранения энергии и импульса, в процессе излучения возникает влияние излученного электромагнитного поля на саму излучающую систему. Это влияние называется реакцией излучения и может быть определено с использованием понятий введенных в классической механике.

Из механики известно, что работа силы на конечном участке пути равна:

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}; \quad A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_L \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt = \int_L (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) dt.$$

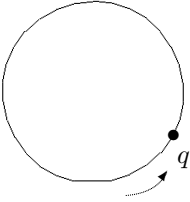


Рис. 9:

Рассмотрим для примера заряд q движущийся по окружности L с ускорением \mathbf{a} (Рис.9), тогда: $\mathbf{d} = q\mathbf{r}$; $\ddot{\mathbf{d}} = q\mathbf{a}$ и в соответствии с общей теорией излучения заряд будет излучать электромагнитное поле с интенсивностью:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2q^2}{3c^3} a^2(\tau)$$

Импульс уносимый полем меняет импульс самого заряда. Изменение импульса можно охарактеризовать силой \mathbf{F}_p в соответствии со вторым законом Ньютона. В результате за конечный промежуток времени имеем:

$$-\mathcal{E} = - \int_{t_0}^t \frac{2q^2}{3c^3} a^2 dt = \int_{t_0}^t (\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{v}) dt.$$

В данном соотношении учтено, что энергия переданная полю вычитается из энергии частицы. Преобразуем левую часть этого равенства путем интегрирования по частям:

$$\mathcal{E} = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{t_0}^t \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \frac{2q^2}{3c^3} \left[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \Big|_{t_0}^t - \int_{t_0}^t (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}) \right]. \quad (31)$$

В силу того, что интенсивность излучения мала, можно допустить приближенно, что частица придет практически в ту же точку из которой она начала двигаться (т.е. энергия, которую потеряет частица за время движения мала). Следовательно приближенно имеют место равенства: $\mathbf{a}(t) \simeq \mathbf{a}(t_0)$, $\mathbf{v}(t) \simeq \mathbf{v}(t_0)$; $\Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})(t_k) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})(t_0) \simeq 0$. В результате формула (31) может быть переписана в виде:

$$-\mathcal{E} = \frac{2q^2}{3c^3} \int_{t_0}^t \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^t (\mathbf{F}_p \cdot \mathbf{v}) dt.$$

Сила реакции излучения.

Таким образом силу реакции излучения \mathbf{F}_p приближенно можно определить равенством:

$$\mathbf{F}_p = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\mathbf{a}} \quad (32)$$

Формула (32) справедлива если сила реакции излучения много меньше действующей на систему внешней силы. Поэтому использовать выражение (32) для силы реакции излучения без учета внешних сил некорректно.

Пример.

Если записать закон Ньютона только для силы реакции излучения (для простоты в одномерном случае)

$$m\ddot{x} = ma = \frac{2q^2}{3c^3} \frac{da}{dt}, \quad (33)$$

то решение этого уравнения будет иметь вид:

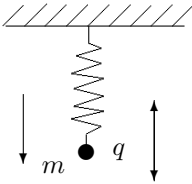
$$a = a_0 \exp\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

где a_0 – ускорение частицы в начальный момент времени, а $\tau = 2q^2/3c^3m$. Видно, что при $t \rightarrow \infty \Rightarrow a \rightarrow \infty$. То есть частица под действием излучения самоускоряется. Это заключение не корректно, так как выражением (32) выведено в приближении малости силы реакции излучения по сравнению с силой, заставляющей частицу двигаться по определенной траектории с ускорением. А в данном примере эта внешняя сила равна нулю.

Сила реакции излучения называется также силой лучистого трения.

§7 Спектральное распределение излучения.

Заряженный осциллятор.



Рассмотрим частицу заряда q и массы m , которая колеблется на пружине жесткостью k . Такая система называется заряженный осциллятор (рис. 10). Так как частица имеет заряд и движется с ускорением, она излучает электромагнитное поле. Если частица не заряжена (т.е. $q = 0$), то уравнение движения и решение этого уравнения, при условии, что частица в начальный момент времени $t = 0$ находилась в точке с координатой x_0 и покоилась, имеют вид:

$$m\ddot{x} = -kx; \rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; x = x_0 \cos(\omega t); \quad (34)$$

Рис. 10:
где $\omega_0^2 = k/m$. То есть частица колеблется с частотой ω_0 около положения равновесия с амплитудой колебаний x_0 .

Рассмотрим случай, когда $q \neq 0$ (т.е. частица заряжена). В этом случае уравнение движения с учетом силы реакции излучения примет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx + F_p = -kx + \frac{2q^2}{3c^3} \frac{d^3 x}{dt^3}, \quad (35)$$

где сила реакции излучения F_p – малая поправка относительно упругой возвращающей силы $-kx$, (т.е. $|kx| \gg F_p$). Уравнение (35) является обыкновенным дифференциальным уравнением третьего порядка с постоянными коэффициентами. Найдем приближенное решение данного уравнения с учетом малости силы лучистого трения. Понижим порядок уравнения (35) с учетом решения уравнения движения без силы лучистого трения: $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$. Таким образом $m\ddot{x} \simeq -kx - 2\omega_0^2 q^2 \dot{x}/(3c^3)$. В результате уравнение (35) совпадает с хорошо известным уравнением колебаний при наличии силы трения:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma = \frac{2q^2}{3c^3} \omega_0^2.$$

Решение этого уравнения представим в виде:

$$x(t) = \text{Re} \left\{ x_0 \exp(i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2} t) \right\},$$

что соответствует затухающим колебаниям с частотой ω_0 . Учитывая, что γ – малый параметр, для ускорения получим:

$$a(t) = \text{Re} \left\{ a_0 \exp(i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2} t) \right\}.$$

Энергия излучения осциллятора.

Пусть в момент времени $t = 0$ систему вывели из положения равновесия, тогда энергия, излученная этой системой за все время движения определяется выражением:

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty I(t) dt = \int_0^\infty \frac{2q^2}{3c^3} a^2(\tau) dt, \quad \tau = t - r/c.$$

Для вычисления интеграла по времени в выражении полной энергии излучения, воспользуемся Фурье преобразованием для ускорения частицы. Напомним, что прямое и обратное Фурье-преобразования для произвольной функции $f(t)$ имеет вид:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega.$$

В результате:

$$\mathcal{E} = \int_0^{\infty} \frac{2q^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a(\omega)e^{i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a(\omega')e^{i\omega' t} d\omega' dt$$

В последнем выражении можно вычислить интеграл по dt от функций $e^{i\omega t}$ и $e^{i\omega' t}$, что дает $2\pi\delta(\omega - \omega')$, где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Спектральное распределение излучения.

Из свойств преобразования Фурье очевидно, что в общем случае комплексные функции Фурье-образов удовлетворяют соотношению: $a(-\omega) = a^*(\omega)$, поэтому для полной энергии, излученной системой имеем:

$$\mathcal{E} = \int \frac{2q^2}{3c^3} |a(\omega)|^2 d\omega = \int I(\omega) d\omega$$

Функция $I(\omega)$ определяет энергию, которая излучается системой в интервале частот $d\omega$ и называется спектральной функцией распределения излучения.

Пример.

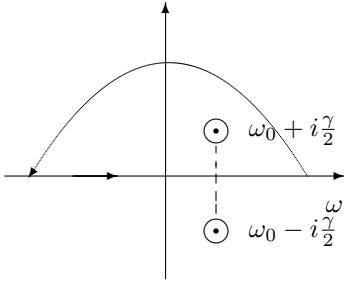


Рис. 11:

Вычислим, например $I(\omega)$ для заряженного осциллятора в явном виде. Найдем Фурье-образ для $a(t)$. Пусть система до момента времени $t = 0$ покоилась и была выведена из положения равновесия для $t \geq 0$:

$$a(t) = \begin{cases} \text{Re} [a_0 e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma}{2} t}], & \text{при } t > 0 \\ 0, & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

В результате:

$$a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} a_0 \exp \left\{ i(\omega_0 - \omega)t - \frac{\gamma}{2} t \right\} dt = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(-1)}{i(\omega_0 - \omega) - \frac{\gamma}{2}}.$$

Таким образом:

$$I(\omega) = \frac{const}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}}.$$

Чтобы найти $const$ можно связать ее с полной энергией излучения системы. То есть:

$$\mathcal{E} = I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{const d\omega}{[(\omega - \omega_0) + i\frac{\gamma}{2}][(\omega - \omega_0) - i\frac{\gamma}{2}]}$$

Так как подынтегральная функция имеет два полюса в комплексной плоскости ω , для интегрирования можно замкнуть контур по полуокружности бесконечного радиуса и воспользоваться теоремой о вычетах (рис. 11). В результате найдем:

$$I_0 = \frac{2\pi i const}{\omega_0 + i\frac{\gamma}{2} - \omega_0 + i\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\pi}{\gamma} const; \quad \rightarrow \quad const = I_0 \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Следовательно спектральное распределение излучения заряженного осциллятора определяется выражением:

$$I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma^2}{4}} \quad (36)$$

Выводы.

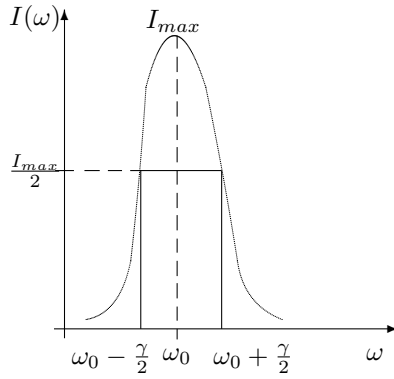


Рис. 12: форма спектральной линии излучения.

Из полученного выражения вытекает, что такая система излучает электромагнитное поле на всех частотах. Если в (36) положить $\gamma = 0$, то можно найти $\lim_{\gamma \rightarrow 0} I(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$. То есть в пределе, соответствующему пренебрежением законам сохранения энергии и импульса система излучает монохроматическое излучение с частотой ω_0 . Но так как $\gamma \neq 0$, то система излучает электромагнитное поле на всех частотах.

Таким образом создать источник монохроматического излучения невозможно в принципе, так как законы сохранения энергии и импульса являются универсальными и не установлено отклонений от этих законов во всех экспериментах. Но так как γ малая величина, излучение в основном концентрируется вблизи ω_0 .

Найдем значения функций $I(\omega)$ в точках ω_0 и $\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}$, по определению:

$$I(\omega_0) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2} = \frac{2I_0}{\pi\gamma}; \quad I(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2}) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\gamma}{\frac{\gamma^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{I_0}{\pi\gamma} \quad (37)$$

То есть значение $I(\omega_0 \pm \frac{\gamma}{2})$ в два раза меньше, чем $I(\omega_0)$. Расстояние между точками $\omega_0 - \frac{\gamma}{2}$ и $\omega_0 + \frac{\gamma}{2}$ на оси частот, равное γ , называется шириной излучаемой спектральной линии, а кривая, которая изображает зависимость спектральной функции распределения от частоты (Рис.12) называется формой спектральной линии излучения.

Литература

- [1] *С.Р.де Гроот, Л.Г.Сатторп.* Электродинамика. М., Наука, 1982.
- [2] *А.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов.* Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М., Наука, 1978.
- [3] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Гидродинамика. М., Наука, 1986.
- [4] *В.Г.Левич.* Курс теоретической физики. Том 1 М., Наука, 1969.
- [5] *В. Карцев.* Приключения великих уравнений. М., Знание, 1986, 288 с.
- [6] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. т.6. М., Мир, 1966, 343с.
- [7] *Джексон.* Классическая электродинамика.
- [8] *Градитейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.
- [9] *Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский.* Квантовая теория волнового момента. Ленинград, Наука, 1975.
- [10] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.
- [11] *М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин.* Классическая электродинамика. М., Наука, 1988.

Оглавление

§1	Потенциалы Лиенара–Вихерта.	1
§2	Вибратор Герца.	3
§3	Поле вибратора Герца в волновой зоне.	5
§4	Мощность излучения.	5
§5	Общая теория излучения.	8
§6	Реакция излучения. Сила реакции излучения.	12
§7	Спектральное распределение излучения.	13