

§1 Основные уравнения электростатики.

Электростатическое поле является частным случаем электромагнитного поля. Электростатическое поле возникает в системе неподвижных зарядов.

Дифференциальные уравнения.

Система дифференциальных уравнений для описания электростатического поля имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad (1)$$

Здесь \mathbf{D} - вектор индукции, \mathbf{E} - вектор напряженности электрического поля, \mathbf{P} - вектор поляризации среды, ρ - объемная плотность заряда. Векторы, определяющие свойства электростатического поля, являются функциями от координат и не зависят от времени.

В случае однородной изотропной среды для слабых полей (слабым является поле, если оно много меньше внутриаомного) вектор поляризации связан с вектором напряженности линейным соотношением $\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}$, где коэффициент κ - коэффициент диэлектрической восприимчивости среды. В этом простейшем случае вектор индукции электрического поля пропорционален вектору напряженности $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, а ϵ - называется диэлектрической проницаемостью среды: $\epsilon = 1 + 4\pi\kappa$.

Для сред со сложными пространственными свойствами (например, анизотропные среды) соотношения, устанавливающие связь векторов индукции и напряженности поля определяются покомпонентно:

$$P_i = \sum_{k=1}^3 \kappa_{ik} E_k; \quad D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} E_k; \quad \epsilon_{ik} = 1 + 4\pi \kappa_{ik}; \quad i \in 1, 2, 3,$$

где κ_{ik} и ϵ_{ik} образуют тензоры диэлектрической восприимчивости и диэлектрической проницаемости, соответственно.

Уравнения (1) представляют из себя систему уравнений в частных производных и могут быть использованы для нахождения поля заданной системы зарядов.

Интегральные уравнения.

Описание электростатического поля с использованием интегральных уравнений системы уравнений Максвелла основано на следующей системе:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q = \int_V \rho dv; \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (2)$$

Первое из этих уравнений носит название теоремы Гаусса в электростатике и определяет поток вектора индукции электрического поля через произвольную замкнутую поверхность S .

Применение интегральных уравнений целесообразно, в первую очередь, при наличии условий симметрии, сводящих интегральные выражения к простым алгебраическим равенствам. Кроме того, интегральные уравнения позволяют установить законы поведения векторов поля на границе раздела сред.

Метод скалярного потенциала.

Данный метод определения свойств электростатического поля основан на применении вспомогательной скалярной функции - скалярного потенциала φ , связанного с величиной напряженности поля соотношением: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. Как следует из системы уравнений Максвелла, уравнение для определения скалярного потенциала в случае однородной изотропной среды имеет вид:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho \quad (3)$$

Решение данного неоднородного уравнения Пуассона (в случае, если в пространстве не заданы специальные граничные условия) определяется хорошо известным интегралом Пуассона:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (4)$$

В тех случаях, когда в пространстве заданы определенные граничные условия поведения поля (потенциала) на выделенных поверхностях, решение уравнения (3) представляется в виде суммы частного решения неоднородного уравнения (3) и общего решений однородного уравнения $\nabla^2 \varphi = 0$. В этом случае путем выбора произвольных констант в суперпозиции решений однородного уравнения необходимо обеспечить выполнение граничных условий.

Если диэлектрическая проницаемость является непрерывной функцией координат $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$, уравнение для определения скалярного потенциала в такой среде на основании (1) имеет следующий вид:

$$\nabla^2 \varphi + \left(\text{grad}(\ln \epsilon) \cdot \text{grad} \varphi \right) = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho$$

Векторы Герца.

Еще одним важным методом описания электростатического поля является метод, основанный на применении векторов Герца. Для электростатического поля отличным от нуля является вектор Герца электрического типа $\vec{\Pi}_e$, который удовлетворяет неоднородному уравнению Пуассона:

$$\nabla^2 \vec{\Pi}_e = -4\pi \mathbf{P}, \quad (5)$$

где \mathbf{P} - дипольный момент единицы объема. Решение уравнения (5), при отсутствии граничных условий, представляется в виде известного интеграла Пуассона:

$$\vec{\Pi}_e(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (6)$$

Простейший пример применения вектора Герца электрического типа рассмотрен в ?? (формула ??), который определяет поле, создаваемое точечным дипольным моментом \mathbf{d} , расположенным в начале координат.

§2 Граничные условия

Дифференциальные уравнения Максвелла записаны для областей пространства в которых физические параметры, характеризующие свойства среды являются непрерывными функциями координат. Во многих случаях встречаются ситуации, когда эти свойства меняются скачкообразно, например на поверхности раздела двух сред.

Нормальные составляющие поля.

Чтобы определить поведение векторов поля на границе раздела заменим точную границу раздела тонким переходным слоем, внутри которого параметр ϵ меняется быстро, но непрерывно от значения с одной стороны слоя до значения на другой стороне этого слоя. Внутри этого слоя рассмотрим бесконечно малый цилиндр (см. рис. 1), боковая поверхность которого совпадает с направлением нормали к границе раздела. Пусть основания цилиндра равны ds , а высота цилиндра dh . Поскольку внутри цилиндра вектор \mathbf{D} и его производные непрерывны, то на основании теоремы Гаусса в электростатике (2) поток вектора индукции через выбранную цилиндрическую поверхность равен полному заряду внутри цилиндра и складывается из потока через основания и потока через боковую поверхность. Рассмотрим предел потока вектора индукции через цилиндрическую поверхность при условии, когда высота цилиндра стремится к нулю. В этом случае поток через боковую поверхность стремится к нулю, а в силу малости поверхностей основания оставшиеся интегралы по верхнему и нижнему основанию цилиндра можно вычислить по теореме о среднем, то есть:

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds = \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}_1 ds + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}_2 ds,$$

где \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 значения векторов поля в некоторых средних точках бесконечно малых поверхностей оснований цилиндра, а \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 единичные векторы внешней нормали на верхнем и нижнем основании цилиндра. Очевидно, что данные векторы направлены в противоположные стороны. Для дальнейших рассуждений удобно характеризовать поверхность раздела направлением единичной нормали \mathbf{n} к поверхности раздела двух сред. Выберем направление такой нормали от первой (нижней) среды ко второй (верхней). В этом случае имеем очевидные равенства: $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$. В результате предельное ($dh \rightarrow 0$) выражение для потока вектора индукции электрического поля через рассматриваемую цилиндрическую поверхность будет иметь вид:

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds = -\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} ds + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n} ds = (D_{2n} - D_{1n}) ds. \quad (7)$$

Здесь D_{2n} и D_{1n} - проекции вектора индукции электрического поля на направление нормали к границе раздела двух сред.

В соответствии с теоремой Гаусса поток пропорционален величине заряда внутри рассматриваемого цилиндра. Заряд цилиндра Q складывается из объемных зарядов ρ внутри пространства цилиндра и, в общем случае, поверхностного заряда, плотностью σ на поверхности раздела двух сред. С учетом предельного соотношения $dh \rightarrow 0$ вклад объемных зарядов равен нулю, в результате:

$$\lim_{dh \rightarrow 0} Q = \lim_{dh \rightarrow 0} (\rho ds dh + \sigma ds) = \sigma ds.$$

Таким образом, с учетом равенства (7) в произвольной точке на границе раздела двух сред имеет место следующие условие поведения нормальных составляющих вектора \mathbf{D} :

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi \sigma. \quad (8)$$

Следовательно на незаряженной поверхности раздела двух сред нормальные к границе раздела составляющие вектора индукции являются непрерывными функциями. Если граница раздела заряжена, нормальные составляющие вектора индукции претерпевают скачок равный $4\pi\sigma$.

Для однородных изотропных сред нормальные составляющие вектора напряженности всегда претерпевают скачок, который определяется соотношением:

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = 4\pi \sigma, \quad (9)$$

здесь ϵ_1 и ϵ_2 - диэлектрические проницаемости первой и второй среды, соответственно.

Равенства (8) и (9) справедливы и для случая переменного электромагнитного поля, так как вид теоремы Гаусса в переменном поле не меняется.

Тангенциальные составляющие поля.

Чтобы получить соотношения, связывающие тангенциальные составляющие поле, рассмотрим бесконечно малый прямоугольный контур L две стороны которого параллельны границе раздела и равны dl , а две другие стороны ортогональны границе раздела, пересекают её и равны: dh (см. рис. 2) Рассмотрим циркуляцию вектора напряженности электрического поля вдоль контура L и найдем предел этого выражения при условии $dh \rightarrow 0$. В силу бесконечной малости сторон контура, по теореме о среднем находим:

$$\lim_{dh \rightarrow 0} \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l}_2,$$

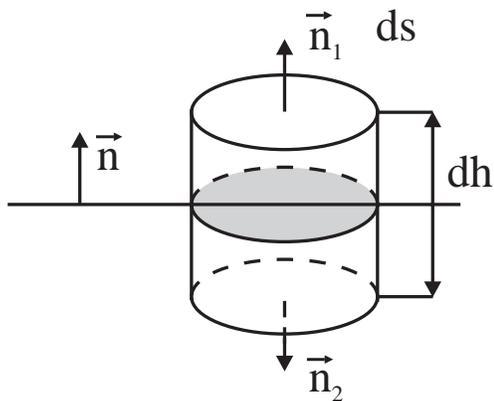


Рис. 1:

где $d\mathbf{l}_1$ и $d\mathbf{l}_2$ векторные элементы линии контура в первой и второй областях, соответственно, равные по величине dl и направленные по касательной к контуру (в противоположных направлениях). Зададим единичный вектор касательный к границе раздела двух сред. В этом случае очевидно, что вектор, касательный к элементам контура dl в одной области совпадает с направлением касательной к границе раздела, а в другой ему противоположен. Так как в соответствии с (2) циркуляция вектора напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура равна нулю, очевидно, что тангенциальные составляющие вектора \mathbf{E} на границе раздела двух сред скачка не претерпевают:

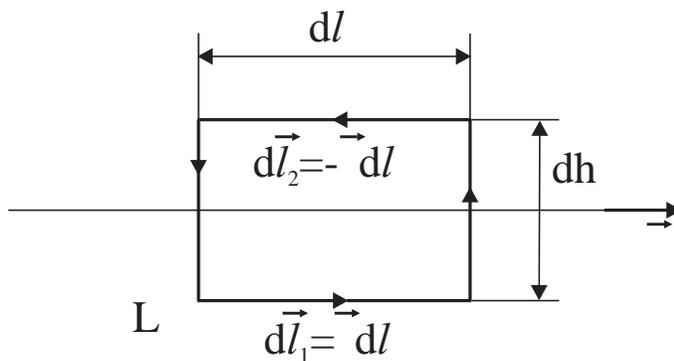


Рис. 2:

$$E_{2\tau} - E_{1\tau} = 0. \quad (10)$$

Соответственно тангенциальные составляющие вектора индукции электрического поля всегда претерпевают скачок, так как для этого вектора в случае однородных изотропных сред имеет место равенство, которое вытекает из (10):

$$\frac{1}{\epsilon_2} D_{2\tau} - \frac{1}{\epsilon_1} D_{1\tau} = 0. \quad (11)$$

Соотношения (10) и (11) остаются справедливыми и в случае переменного электромагнитного поля. В этом случае циркуляция вектора напряженности будет равна потоку вектора производной по времени от вектора индукции магнитного поля через площадку для которой контур L является границей. А так как рассматривается предельный случай $dh \rightarrow 0$, очевидно, что величина площадки стремится к нулю и вклад потока этого вектора равен нулю, что совпадает со случаем стационарного электрического поля.

Скалярный потенциал.

Поведение скалярного потенциала на границе раздела двух сред легко установить на основании (10) и связи вектора напряженности электрического поля со скалярным потенциалом $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)_1 = 0.$$

Интегрируя данное равенство, получим $\varphi_2 = \varphi_1 + \text{const}$. Произвольная константа интегрирования должна быть выбрана равной нулю, так как в противном случае на границе раздела двух сред появилась бы бесконечная сила, что не имеет физически осмысленных причин. Таким образом, на границе раздела двух сред $\varphi_1 = \varphi_2$, и

$$-\epsilon_{2n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2 + \epsilon_{1n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 = 4\pi\sigma.$$

§3 Поле произвольной системы зарядов.

Поле произвольной системы зарядов с заданной объемной плотностью $\rho(\mathbf{r})$, при условии, что в пространстве нет каких либо поверхностей на которых заданы значения потенциала, определяется интегралом Пуассона, который, по сути, отражает принцип суперпозиции:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (12)$$

Здесь \mathbf{r} — радиус-вектор точки, в которой вычисляется значение потенциала, а \mathbf{r}' — радиус-вектор точки интегрирования (см.рис 3).

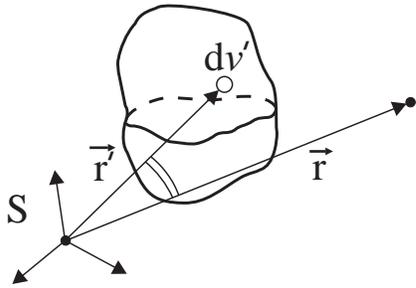


Рис. 3:

Вычисление выражения (12) удобно проводить на основе метода, который получил название метода мультипольного разложения скалярного потенциала. Для его обоснования рассмотрим выражение $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, входящее в подынтегральную функцию (12). По определению:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \alpha + r'^2},$$

где α - угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Введем две вспомогательные радиальные переменные $r_<$ и $r_>$ по следующему определению: $r_< \equiv \min(r, r')$ и $r_> \equiv \max(r, r')$. В результате $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ можно представить в виде:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r_> \sqrt{1 - 2 \frac{r_<}{r_>} \cos \alpha + \left(\frac{r_<}{r_>}\right)^2}. \quad (13)$$

Полиномы Лежандра.

В теории ортогональных полиномов известны функции, разложение которых в ряд Тейлора, приводят к определению ортогональных полиномов. Такие функции называются производящими функциями. В частности, функция вида $f(t) = 1/\sqrt{1 - 2tx - t^2}$ при разложении ее в ряд Тейлора по переменной t , при условии $t < 1$ и $|x| \leq 1$ определяет систему ортогональных полиномов $P_l(x)$, которые получили название полиномы Лежандра [8]:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx - t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l, \quad P_l(x) = \frac{1}{l!} \left. \frac{d^l f}{dt^l} \right|_{t=0}. \quad (14)$$

В частных случаях значения индекса l полиномы Лежандра имеют вид:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \dots$$

Полиномы Лежандра образуют систему ортогональных полиномов, т.е:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (15)$$

где δ_{nm} - символ Кронекера, равный 1 при $n = m$ и 0 при $n \neq m$. Это, в частности, означает, что интеграл от одного полинома Лежандра $P_l(x)$ равен:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) dx = 2\delta_{l0},$$

Мультипольное разложение.

С учетом равенств (13) и (14) выражение (12) можно представить в виде бесконечного ряда мультиполей скалярного потенциала φ_l

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos \alpha) d\mathbf{r}' \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_l(\mathbf{r}), \quad (16)$$

где явное выражение для мультиполя скалярного потенциала мультипольности l имеет вид:

$$\varphi_l(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos \alpha) dv' \quad (17)$$

Сферические функции.

Угол α определен как угол между двумя радиус-векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' . В теории специальных функций установлено следующее равенство, позволяющее произвести разделение угловых переменных радиус-векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' в полиноме Лежандра $P_l(\cos \alpha)$:

$$P_l(\cos \alpha) = \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta', \varphi'). \quad (18)$$

Здесь $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ - сферические функции, а θ и φ - угловые переменные радиус - вектора в сферической системе координат. Сферические функции образуют полную ортонормированную систему функций

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (19)$$

и являются решением следующего уравнения в частных производных

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0,$$

где l - любое целое положительное число, а m принимает следующие возможные значения при фиксированном l : $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$. Явный вид сферических функций можно найти в справочниках по специальным функциям [9]. Для примера, ниже приведены явные выражения сферических функций с часто встречающимися в приложениях значениями индексов:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{10}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta; \quad Y_{1\pm 1}(\theta, \varphi) = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}. \quad (20)$$

Пример.

Мультипольное разложение скалярного потенциала является удобным способом вычисления скалярного потенциала произвольной системы зарядов в силу того, что позволяет разделить переменные в трехкратном интеграле (12) и упростить вычисление этого интеграла в конкретных случаях.

Рассмотрим, например, вычисление скалярного потенциала, создаваемого равномерно заряженным с плотностью заряда ρ шаром радиуса R . Выберем сферическую систему координат, связанную с центром шара. На основании (17) получим для мультиполя скалярного потенциала φ_l :

$$\varphi_l(\mathbf{r}) = \rho \int_0^R \frac{r'^l}{r'^{l+1}} r'^2 dr' \int_{-1}^1 P_l(x) dx \int_0^{2\pi} d\varphi' = 4\pi \rho \delta_{l0} \int_0^R \frac{1}{r'} r'^2 dr'.$$

При вычислении радиального интеграла рассмотрим два случая, когда точка наблюдения \mathbf{r} лежит вне и внутри шара. Пусть точка наблюдения лежит вне шара, тогда $r_{>} = r$ и радиальный интеграл равен:

$$\int_0^R \frac{1}{r_{>}} r'^2 dr' = \frac{1}{r} \int_0^R r'^2 dr' = \frac{R^3}{3r}.$$

Таким образом потенциал вне шара определяется следующим выражением:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \delta_{l0} = \frac{Q}{r}, \quad r > R$$

где Q -полный заряд шара.

Второй случай - когда точка наблюдения r лежит внутри шара. Для вычисления радиального интеграла разобьем область интегрирования на две - от 0 до r и от r до R . В результате можно определить переменную $r_{>}$ в каждой области интегрирования и выполнить аналитическое интегрирование

$$\int_0^R \frac{1}{r_{>}} r'^2 dr' = \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 dr' + \int_r^R r' dr' = \frac{r^2}{3} + \left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) = \frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6}.$$

В результате потенциал, создаваемый шаром для точек, лежащих внутри шара равен:

$$\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi\rho\left(\frac{R^2}{2} - \frac{r^2}{6}\right); \quad r < R.$$

Очевидно, что на поверхности шара полученные выражения для потенциалов совпадают, что отражает условие непрерывности потенциала.

§4 Поле системы зарядов на больших расстояниях

Рассмотрим важный для практических приложений случай поля создаваемого ограниченной в пространстве системой зарядов на больших расстояниях от заданной системы. Выберем систему координат, связанную с точкой внутри заданной системы зарядов.

В этом случае радиальная переменная точки наблюдения удовлетворяет условию $r \gg r'$ и таким образом является переменной $r_{>}$ в выражении для мультиполя скалярного потенциала. Найдем явный вид первых трех мультиполей скалярного потенциала для этого случая.

Нулевой мультиполь.

При $l = 0$ имеем:

$$\varphi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') P_0(\cos \alpha) d\mathbf{r}'_v = \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'_v = \frac{Q}{r} \quad (21)$$

Таким образом нулевой мультиполь скалярного потенциала произвольной системы зарядов на больших расстояниях от системы совпадает с потенциалом точечного заряда равного заряду системы, расположенного в начале координат.

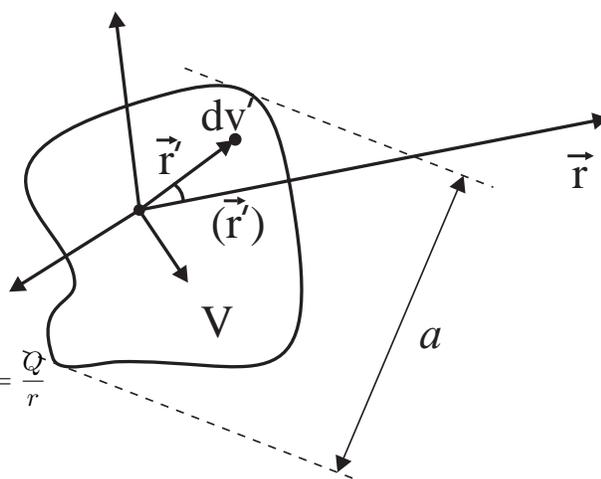


Рис. 4:

Дипольный момент.

Вычисление первого мультиполя в этом случае приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{r}) &= \int \rho(\mathbf{r}') \frac{r'}{r^2} P_1(\cos \alpha) d\mathbf{r}'_v = \frac{1}{r^2} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')}{r} d\mathbf{r}'_v = \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r^3} \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'_v = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{r^3} \end{aligned} \quad (22)$$

где \mathbf{d} - дипольный момент системы зарядов. Таким образом первый мультиполь скалярного потенциала произвольной системы зарядов на больших расстояниях от системы совпадает со скалярным потенциалом точечного диполя расположенного в начале координат (формула ?? ??).

Квадрупольный момент.

Вычислим второй мультиполь скалярного потенциала. По определению получим:

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \int \rho(\mathbf{r}') \frac{r'^2}{r^3} P_2(\cos \alpha) d\mathbf{r}'_v = \frac{1}{r^3} \int r'^2 \rho(\mathbf{r}') \frac{1}{2} \left[3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^2 r'^2} - 1 \right] d\mathbf{r}'_v. \quad (23)$$

В двух предыдущих случаях проведенные преобразования позволили полностью разделить переменные, относящиеся к точке наблюдения поля и переменные характеризующие распределение зарядов в системе.

Для достижения аналогичного результата во втором мультиполе выполним тождественные преобразования с подынтегральной функцией. Представим скалярное произведение радиус-векторов в декартовой системе координат по определению:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = \sum_{k=1}^3 x_k x'_k; \quad (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 = \sum_{k,n=1}^3 x_k x'_k x_n x'_n.$$

Здесь x_k, x'_k - декартовы компоненты радиус векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' , соответственно. Квадрат радиус-вектора \mathbf{r} запишем, кроме того, в виде:

$$r^2 = \sum_{k=1}^3 x_k x_k = \sum_{k,n=1}^3 x_k x_n \delta_{kn}.$$

Подставляя полученные выражения в (23) можно полностью выделить переменные точки наблюдения и представить второй мультиполь в виде:

$$\varphi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2r^5} \sum_{n,k=1}^3 x_n x_k Q_{nk}. \quad (24)$$

Здесь введено понятие квадрупольного момента системы зарядов Q , девять элементов которого Q_{nk} равны:

$$Q_{nk} = \int \rho(\mathbf{r}') \left[3x'_n x'_k - r'^2 \delta_{nk} \right] d\mathbf{r}', \quad n, k \in 1, 2, 3. \quad (25)$$

Используя определение плотности заряда для системы точечных зарядов (??), можно получить определение квадрупольного момента системы точечных зарядов:

$$Q_{nk} = \sum_{i=1}^N q_i \left(3x_n^i x_k^i - r_i^2 \delta_{nk} \right). \quad (26)$$

Свойства квадрупольного момента.

Из определения квадрупольного момента (25) вытекают следующие свойства Q_{kn} :

1. девять компонент квадрупольного момента образуют тензор;
2. определение квадрупольного момента инвариантно относительно выбора начала координат для электронейтральной системы зарядов;
3. если расположить элементы тензора квадрупольного момента в виде матрицы размерности 3×3 , то тензор квадрупольного момента симметричен относительно главной диагонали, так как $Q_{kn} = Q_{nk}$;
4. сумма диагональных элементов матрицы квадрупольного момента равна нулю:

$$\sum_{n=1}^3 Q_{nn} = \sum_{n=1}^3 \int \rho \left[3x_n'^2 - r'^2 \right] d\mathbf{r}' = \int \rho \left[3r'^2 - 3r'^2 \right] d\mathbf{r}' = 0.$$

Таким образом мультипольное разложение скалярного потенциала для произвольной системы зарядов на больших расстояниях от системы зарядов приводит к системе геометрических характеристик распределения заряда - полный заряд, дипольный момент, квадрупольный момент. Если продолжить вычисление старших мультиполей с $l > 2$, то будут появляться все новые и новые инвариантные характеристики, определяющиеся только геометрией и плотностью распределения заряда. В практических приложениях, обычно, оказывается вполне достаточно трех первых мультиполей, которые получены в настоящем параграфе.

Потенциал на больших расстояниях.

Три первых мультиполя скалярного потенциала определяют приближенное выражение для скалярного потенциала на больших расстояниях от произвольной системы зарядов в виде:

$$\varphi \approx \frac{Q}{r} + \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d})}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{i,k=1}^3 x_i x_k Q_{ik} + \dots = \frac{Q}{r} \left[1 + c_1 \frac{a}{r} + c_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \dots \right], \quad (27)$$

здесь a - характерный размер системы зарядов.

Как видно ряд мультиполей состоит из слагаемых, с возрастающей степенью r в знаменателе. Так нулевой мультиполь обратно пропорционален первой степени расстояния от начала координат до точки наблюдения. Первый мультиполь обратно пропорционален второй степени r , третий мультиполь обратно пропорционален третьей степени r и так далее. Другими словами мультипольное разложение скалярного потенциала есть ряд по степеням малости переменной a/r . Таким образом при нахождении поля на больших расстояниях от системы достаточно установить первые ненулевые слагаемые для достижения необходимой точности вычислений.

Поле на больших расстояниях.

Используя (27) можно вычислить напряженность поля системы зарядов на больших расстояниях по определению $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$:

$$\mathbf{E} \approx \frac{Q}{r^2} \mathbf{n} + \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{r^3} + \dots, \quad (28)$$

где \mathbf{n} -единичный радиус - вектор. В разложении (28) первое слагаемое - это напряженность поля точечного заряда, расположенного в начале координат (??). Второе слагаемое - это напряженность поля точечного диполя, расположенного в начале координат (??) Третье слагаемое - это напряженность поля квадрупольного момента) расположенного в начале координат и так далее.

§5 Электростатика проводников

Проводниками называются вещества, в которых под действием электрического поля возникает движение носителей зарядов или ток. В электростатике рассматривается случай неподвижных зарядов, то есть плотность тока $\mathbf{j} = 0$. Так как плотность тока пропорциональна напряженности поля \mathbf{E} то в свободном проводнике $\mathbf{E} = 0$. Условие равенства нулю напряженности поля в проводнике при отсутствии причин вызывающих ток является определением идеального проводника. Равенство нулю поля в проводнике имеет место только в случае, если в проводнике не поддерживается ток.

Отсутствие объемных зарядов.

Если проводнику передан заряд, то за короткий промежуток времени он распределяется по поверхности проводника, так чтобы суммарное поле внутри проводника стало равным нулю. Доказательство данного утверждения основано на законе сохранения заряда из которого вытекает уравнение для изменения объемной плотности заряда во времени:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div } \sigma \mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon} 4\pi \rho; \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{\tau} t, \quad (29)$$

где $\tau = \epsilon/4\pi\sigma$ -параметр, который называется временем релаксации. Решение уравнения (29) приводит к следующей зависимости ρ от времени: $\rho = \rho_0 \exp(-t/\tau)$. В силу того, что для проводников $\tau \ll t$ в них за очень короткий промежуток времени объемная плотность заряда становится равной нулю.

Поле вблизи поверхности проводника.

Так как внутри проводника поле равно нулю $\mathbf{E} = 0$, потенциал φ постоянен для всего объема проводника $\varphi = \text{const}$. Из граничных условий на поверхности проводника:

$$E_{1\tau} - E_{2\tau} = 0; \quad \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = 4\pi\sigma \quad (30)$$

следует, что если проводник находится в первой области ($\mathbf{E}_1 = 0$), то поле вблизи проводника равно: $\mathbf{E} = 4\pi \mathbf{n} \sigma / \epsilon$, где \mathbf{n} единичная нормаль к поверхности проводника, направленная от проводника, σ - проводимость проводника, ϵ - диэлектрическая проницаемость вещества, граничащего с проводником.

Так как $E_{2n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, то полный заряд проводника, который распределяется по поверхности проводника, равен:

$$q = \oint_S \sigma ds = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{4\pi} \oint_S \epsilon E_n ds \quad (31)$$

Энергия системы проводников.

Вычислим энергию поля ϵ системы N -штук заряженных проводников, находящихся в объеме V . По определению:

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \int_V \mathbf{E}^2 dv = -\frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot \text{grad } \varphi) dv = -\frac{1}{8\pi} \int_V \text{div}(\varphi \mathbf{E}) dv. \quad (32)$$

Так как внутри проводников поле равно нулю интегрирование по объему V включает в себя пространство только вне проводников. В пространстве между проводниками зарядов нет, следовательно для всех точек пространства вне проводников $\text{div } \mathbf{E} = 0$, что и учтено в последнем равенстве. На основании теоремы Остроградского-Гаусса преобразуем интеграл (32) от интеграла по объему к интегралу по поверхности, в результате:

$$\epsilon = -\frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi (\mathbf{E} ds). \quad (33)$$

Здесь поверхность S состоит из поверхности ограничивающей объем V и поверхностей, ограничивающих проводники.

При интегрировании по всему пространству поверхность интегрирования состоит из бесконечно удаленной поверхности и поверхностей N -штук проводников. При этом интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю, так как поле на бесконечных расстояниях от системы проводников конечных размеров исчезает быстрее, чем растет поверхность интегрирования. В результате на основании (31) получим:

$$\epsilon = -\frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \varphi (\mathbf{E} ds) = \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^N \varphi_i \oint_{S_i} E_n ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i \quad (34)$$

Здесь учтено, что направление внешней нормали на поверхности проводника и направление вектора напряженности поля противоположны.

Емкостные коэффициенты.

В общем случае заряды q и потенциалы φ проводников взаимосвязаны. Это объясняется тем, что как q , так и φ удовлетворяют принципу суперпозиции, следовательно между ними обязательно существует линейная связь вида:

$$q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} \varphi_j \quad (35)$$

коэффициенты C_{ij} - зависят от формы проводников и расстояния между ними и называются при одинаковых индексах $C_{ii} = C$ коэффициентами емкости или просто емкостями проводников, а при различных значениях индексов C_{ij} - коэффициентами электростатической индукции.

Например для уединенного проводника произвольной формы, ограниченного поверхностью S заряд равен $q = C\varphi$, и следовательно емкость уединенного проводника есть:

$$C = \frac{q}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} \oint_S \sigma ds = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \epsilon \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds. \quad (36)$$

В частном случае шара или сферы радиуса R имеем $C = R$.

На основании формул (34), (35) нетрудно получить связь энергии поля системы проводников с потенциалами или зарядами проводников:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N C_{ij} \varphi_i \varphi_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N (C^{-1})_{ij} q_i q_j; \quad C_{ij} = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j}. \quad (37)$$

Конденсатор.

Система состоящая из двух проводников называется конденсатором. Проводники образуют обкладки конденсатора. Обкладки конденсатора заряжаются равными по величине, но противоположными по знаку зарядами. В области между обкладками возникает разность потенциалов, пропорциональная заряду на обкладках. Емкость конденсатора называется отношением заряда обкладки к разности потенциалов между обкладками $C = |q|/|\varphi_1 - \varphi_2|$.

Теорема взаимности.

Для системы проводников существует теорема которая называется теоремой взаимности. Она может быть получена на основании преобразований вытекающих из формулы Грина:

$$\int_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dv = \oint_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds \quad (38)$$

Выберем в качестве φ и ψ два различных решения электростатической задачи, которым соответствуют два различных распределения поля. Интегрирование по объему приводит в этом случае к нулю так, как в пространстве между проводниками заряды отсутствуют, а следовательно $\Delta \psi = \Delta \varphi = 0$. Интегрирование по поверхности в правой стороне равенства (39) включает как интегрирование по бесконечно-удаленной поверхности, так и по поверхностям проводников. При этом интеграл по бесконечно-удаленной поверхности равен нулю в силу того, что поле на больших расстояниях от системы конечных проводников отсутствует. А интегрирование по поверхностям проводников приводит к выражениям для полного заряда проводников. Таким образом получается соотношение, которое имеет наименование теоремы взаимности в электростатике:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i Q_i^\psi = \sum_{i=1}^N \psi_i Q_i^\varphi \quad (39)$$

где Q_i^φ и Q_i^ψ - полные заряды на i -ом проводнике, соответствующие потенциалам φ и ψ в окружающем проводники пространстве. Теорема взаимности не зависит от формы проводника.

Пример.

Из теоремы взаимности, например, следует, что если есть два проводника при этом первый несет на себе заряд q , а второй не заряжен, то если перенести весь заряд q с первого проводника на второй, то на первом проводнике установится такой потенциал, который был на втором проводнике.

$$\varphi_1 Q_1^\psi + \varphi_2 Q_2^\psi = \psi_1 Q_1^\varphi + \psi_2 Q_2^\varphi,$$

отсюда

$$\varphi_2 = \psi_1$$

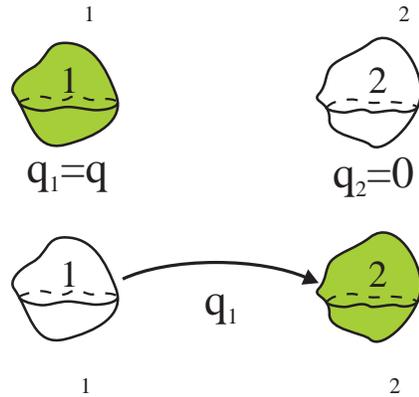


Рис. 5:

§6 Метод изображений

Когда заряженный проводник помещен во внешнее электрическое поле, поле внутри проводника складывается из внешнего поля и поля, создаваемого поверхностными зарядами, которые перераспределяются по поверхности проводника так, что суммарное поле остается равным нулю.

Экранировка заряда.

Заряды на поверхности проводника расположены в тонком слое, толщина которого сравнима с атомными размерами. В этом смысле, если всю область проводящего материала удалить из проводника, за исключением тонкого поверхностного слоя, то поле, создаваемое проводником, не изменится. При этом поле во внутренней области, ограниченной поверхностным слоем, будет оставаться равным нулю независимо от величины внешнего поля. По этой причине такая проводящая оболочка называется "экраном". Эта поверхностная, тонкая оболочка экранирует внутреннюю полость от воздействия внешних полей.

Рассмотрим теперь полость объема V с $\epsilon = 1$ внутри бесконечного проводника. Пусть внутри этой полости находятся некоторый заряд с плотностью ρ . Наличие такого заряда приведет к тому, что на поверхности полости должно возникнуть распределение заряда, компенсирующее поле внутри проводника. Покажем, что полный заряд, индуцированный на поверхности полости равен заряду находящемуся внутри полости, но имеет противоположный знак. Для доказательства рассмотрим теорему Гаусса для объема V полости, которая ограничена поверхностью S

$$\oint_S (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = 4\pi \int_V \rho dv$$

В силу того, что на внешней поверхности проводника $\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{n}$, где \mathbf{n} внешняя нормаль к поверхности проводника, которая в каждой точке поверхности направлена противоположно внешней нормали выбранного объема полости $(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}) = -4\pi\sigma ds$. В результате:

$$-\oint_S \sigma ds = \int_V \rho dv,$$

что и доказывает сделанное выше утверждение.

Таким образом, заряд помещенный в полость внутри бесконечного проводника притянул на поверхность полости заряды противоположного знака и следовательно заставил уйти на бесконечность такой же заряд одноименного знака.

Если теперь убрать проводник оставив тонкий поверхностный слой, окружающий выбранную полость, то поле не изменится - поле вне оболочки будет равно нулю. В результате можно заключить, что тонкий проводящий слой, соединенный проводником с бесконечно удаленной точкой полностью экранирует пространство от поля зарядов, заключенных внутри проводящего слоя. Поле вне проводящего слоя (экрана) не зависит от поля внутри экрана и наоборот поле внутри экрана не зависит от поля вне экрана. Соединение проводника с бесконечно удаленной точкой называется "заземлением". Так как потенциал в бесконечно удаленных точках от системы зарядов равен нулю, то потенциал заземленного проводника принято считать нулевым.

Метод изображений.

То обстоятельство, что проводники характеризуются постоянным потенциалом по объему проводника и то, что внутренняя часть проводника не оказывает никакого влияния на поле, создаваемое проводником приводит к специальному методу определения поля при наличии проводников, который получил наименование **метода изображений**. Суть метода изображений легко понять на основе некоторых предварительных рассуждений. Пусть имеется точечный заряд. Такой заряд создает поле, скалярный потенциал которого, в системе координат, связанной с зарядом, определяется выражением $\varphi = q/r$. Поверхности постоянного потенциала называются эквипотенциальными поверхностями. Эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда совпадают со сферами произвольного радиуса r .

Заменим данный точечный заряд проводящим шаром радиуса R , заряженным до величины q . При этом поверхность шара точно совпадает с эквипотенциальной поверхностью $\varphi = q/R$. Очевидно, что поле вне проводящего шара точно совпадает с полем исходного точечного заряда q . Конечно внутри шара поле равно нулю. Таким образом для области вне шара радиуса R , можно сказать, что поле создаваемое шаром эквивалентно полю точечного заряда q и таким образом нахождение поле заряженного металлического шара сводится к задаче о нахождении поля точечного заряда. Конечно предложенные рассуждения являются тривиальными, но они указывают путь к рассмотрению поля более сложных систем.

Заряд изображения.

Пусть теперь имеются два точечных заряда противоположного знака, находящихся на расстоянии $2a$ друг от друга. Скалярный потенциал таких зарядов в системе координат, связанной с центральной точкой между зарядами равен (заряды расположены на оси x) равен:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{i}a|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{i}a|}.$$

Очевидно, что плоскость $x = 0$ для такой системы зарядов является эквипотенциальной поверхностью на которой $\varphi = 0$. В результате, в силу однозначности решений системы уравнения Максвелла можно утверждать, что поле создаваемое зарядом q , находящимся на расстоянии a от бесконечного (то есть заземленного) проводника с плоской границей, в области вне проводника, в точности совпадает с полем рассматриваемых двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии $2a$ друг от друга. Другими словами заряд q индуцирует на поверхности проводника распределение поверхностной плотности заряда, которое вместе с исходным зарядом создает в области вне проводника скалярный потенциал, равный скалярному потенциалу двух точечных зарядов. Замена поверхностных зарядов проводника одним эффективным зарядом, и составляет содержание метода изображения для задачи о заряде вблизи плоского проводника. А сам эффективный заряд $-q$ называется зарядом изображением.

В более сложных конфигурациях поверхностей проводников вблизи которых находится заряд и требуется найти поле системы заряд - проводник может возникнуть необходимость введения нескольких зарядов изображений, однако общая задача метода изображений состоит в том, чтобы подобрать такой (или такие) эффективные точечные заряды, которые в области вне проводника создают поле эквивалентное поверхностным зарядам проводника.

§7 Энергия электростатического поля

Общее выражение для энергии электростатического поля в объеме V определяется следующим выражением:

$$\varepsilon = \int_V \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} dv \quad (40)$$

Данное выражение можно переписать в нескольких эквивалентных формах, используя другие переменные, возникающие в теории электростатического поля. Для этого рассмотрим векторное равенство:

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{D} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \varphi 4\pi\rho$$

В результате (40) можно представить в виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dv - \frac{1}{8\pi} \int_V \operatorname{div}(\varphi \mathbf{D}) dv = \frac{1}{2} \int_V \rho\varphi dv - \frac{1}{8\pi} \oint_S \varphi(\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}) \quad (41)$$

Поверхностный интеграл в полученном равенстве включает в себя как поверхность, ограничивающую объем V с внешней стороны S_0 , так и поверхности S_i , ограничивающие объемы в пространстве в которых могут быть заданы граничные условия (например проводники у которых потенциал постоянен как объему так и по

поверхности (рис. 6)). Следовательно в общем случае выражение (41) может быть переписано следующим образом для случая, когда в объеме V имеются N областей с граничными условиями:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dv - \frac{1}{8\pi} \oint_{S_0} \varphi (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}) - \frac{1}{8\pi} \sum_{i=1}^N \oint_{S_i} \varphi (\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}). \quad (42)$$

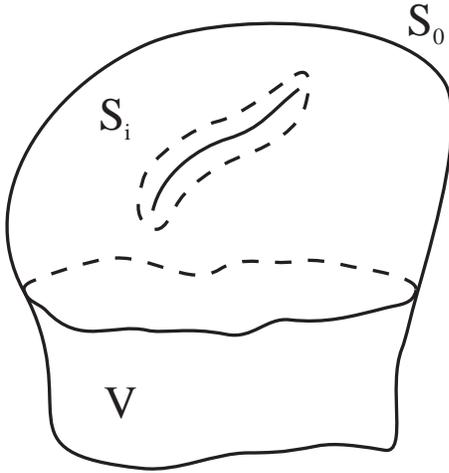


Рис. 6:

Рассмотрим неограниченное пространство в котором выделенные области (и граничные условия) отсутствуют. В этом случае поверхностные интегралы в (42) равны нулю. Действительно интеграл по неограниченной поверхности равен нулю в силу того, что подынтегральная функция с ростом расстояния от начала координат r убывает как $1/r^3$ а поверхность интегрирования растет только как r^2 . Поэтому в пределе $r \rightarrow \infty$ интеграл стремится к нулю. Таким образом энергия поля системы зарядов во всем пространстве определяется выражением:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V \rho(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) dv. \quad (43)$$

Учитывая, что потенциал системы зарядов, является решением уравнения Пуассона (4) выражение (43) можно переписать в виде шестикратного интеграла:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \int_V \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv'. \quad (44)$$

Система точечных зарядов.

Рассмотрим теперь систему N штук точечных зарядов q_i , подставляя плотность заряда системы точечных зарядов (??) в (43) получим:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}_i), \quad (45)$$

здесь $\varphi(\mathbf{r}_i)$ - потенциал в точке расположения i -го заряда, который в соответствии с принципом суперпозиции складывается из потенциалов всех зарядов системы, включая и i -ый заряд:

$$\varphi(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \varphi_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}.$$

В данном выражении $\varphi_i(\mathbf{r}_i)$ - скалярный потенциал создаваемый i -ым зарядом в точке, в которой находится сам i -ый заряд. Этот потенциал называется потенциалом самодействия, а энергия заряда в своем поле, называется энергией самодействия. Очевидно, что потенциал самодействия равен бесконечности. Таким образом энергия системы точечных зарядов может быть представлена в виде:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} + \sum_{i=1}^N \infty_i.$$

Бесконечное слагаемое в данном выражении, которое соответствует сумме энергий самодействия всех точечных зарядов системы, как видно не зависит от взаимного расположения зарядов и при определении энергии системы точечных зарядов в рамках классической электродинамики опускается. Эта трудность классической электродинамики проявляется и в квантовой электродинамике и в настоящее время последовательного классического объяснения не имеет. С другой стороны скалярный потенциал - вспомогательная функция, введенная в электродинамике, определенная не однозначно и произвольная

постоянная добавленная к скалярному потенциалу не влияет на величину напряженности поля. В результате, выражение для энергии системы точечных зарядов определяется равенством:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (46)$$

Можно отметить, что в связи с опусканием бесконечной константы в энергии взаимодействия величина энергии теперь может оказаться как положительной, так и отрицательной. Действительно, если рассмотреть энергию взаимодействия двух точечных зарядов противоположных знаков, то получим отрицательную величину $-q^2/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, что не является противоречием теории (отрицательных энергий не бывает), так как в определении опущена бесконечно большая положительная величина.

О собственной энергии точечного заряда. Привести примеры.?

§8 Энергия системы зарядов во внешнем поле

В настоящем параграфе рассматривается вопрос об энергии взаимодействия ограниченной в пространстве системы зарядов с внешним электростатическим полем, которое создано некоторым источником, находящимся далеко от системы зарядов. Для рассмотрения такой задачи воспользуемся определениями, известными из классической механики.

Работа силы \mathbf{F} определяется в механике соотношением:

$$A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

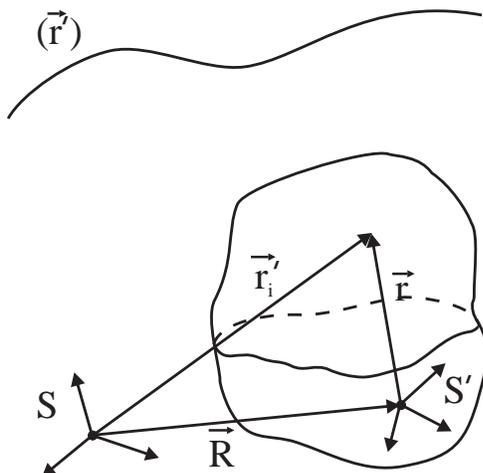
Здесь L - путь перемещения тела. В случае электростатического поля $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\varphi$ и выражение для работы силы \mathbf{F} имеет вид:

$$A = \int_{(1)}^{(2)} (-q \nabla\varphi) \cdot d\mathbf{l} = -q [\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1)] \quad (47)$$

здесь интеграл вычислен от начальной \mathbf{r}_1 до конечной \mathbf{r}_2 точки интегрирования. Энергия W запасенная зарядом в поле равна работе по перемещению заряда из бесконечно удаленной точки в данную точку. В связи с тем, что скалярный потенциал в бесконечно удаленной точке $\varphi(\infty) = 0$, энергия системы N штук зарядов q_i во внешнем поле со скалярным потенциалом φ определяется равенством:

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{r}'_i). \quad (48)$$

Здесь \mathbf{r}'_i - радиус-вектор i -го заряда.



Необходимо обратить внимание на отличие данного выражения от формулы (45). Отличие этих выражений друг от друга состоит в разнице постановок задач. Если в предыдущем параграфе речь шла об энергии поля создаваемого самой системой зарядов, то в данном параграфе речь идет об энергии системы зарядов, находящихся во внешнем поле. При этом поле зарядов самой системы не рассматривается и не учитывается при определении энергии. Постановка задачи приведшая к выражению (48) полностью соответствует определению силы Лоренца для частицы в поле, в которой учитывается только внешнее по отношению к данному заряду поле, а поле самого заряда не учитывается.

В случае непрерывно распределенного заряда в объеме V с плотностью ρ , выражение (48) для энергии системы во внешнем

Рис. 7:

поле имеет вид:

$$W = \int_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) dv. \quad (49)$$

Заряды во внешнем поле

Пусть в некоторой системе координат S определена система зарядов и поле, создаваемое удаленным источником. Выберем внутри рассматриваемой, ограниченной системы зарядов некоторую точку \mathbf{R} и свяжем с этой точкой новую систему координат S' . В результате $\mathbf{r}'_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}_i$, а выражение для энергии взаимодействия системы зарядов с внешним полем примет вид (см. рис. 7):

$$W = \sum_{i=1}^N q_i \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i) \quad (50)$$

Полагая, что скалярный потенциал, создаваемый внешним источником является гладкой функцией, разложим его в ряд Тейлора вблизи точки \mathbf{R} :

$$\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_i) \approx \varphi(\mathbf{R}) + \sum_{k=1}^3 x_k^{(i)} \frac{\partial \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k} + \sum_{k,n=1}^3 \frac{1}{2} x_k^{(i)} x_n^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k \partial X_n} + \dots \quad (51)$$

Здесь X_k ($k = 1, 2, 3$) - декартовы координаты вектора \mathbf{R} в системе координат S , а $x_k^{(i)}$ - декартовы координаты вектора \mathbf{r}_i в системе координат S' .

Так как источник внешнего поля расположен вдали от системы зарядов и в области расположения зарядов системы источников внешнего поля нет, то скалярный потенциал внешнего поля удовлетворяет соотношению: $\Delta\varphi = 0$. В результате последний член равенства (51) можно записать тождественно следующим образом:

$$\sum_{k,n=1}^3 \frac{1}{2} x_k^{(i)} x_n^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k \partial X_n} \rightarrow \sum_{k,n=1}^3 \frac{1}{2} \left[x_k^{(i)} x_n^{(i)} - \frac{1}{3} r^{(i)2} \delta_{k,n} \right] \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k \partial X_n}. \quad (52)$$

Окончательно, с учетом определений дипольного \mathbf{d} и квадрупольного Q_{kn} моментов системы зарядов, из (51) находим для энергии взаимодействия системы зарядов с внешним полем:

$$W = Q\varphi(\mathbf{R}) - \left(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}) \right) + \frac{1}{6} \sum_{k,n=1}^3 Q_{kn} \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{R})}{\partial X_k \partial X_n} + \dots \quad (53)$$

Первое слагаемое в данном выражении определяет энергию точечного заряда во внешнем поле. Второе и третье слагаемые в данном выражении, очевидно имеют смысл энергии диполя $W_d = -(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E})$ и квадруполья W_Q во внешнем поле, соответственно.

Рассмотрим теперь вопрос об энергии диэлектрика, находящегося во внешнем поле. Если выделить внутри диэлектрика бесконечно малый объем dv , то данный объем обладает дипольным моментом равным $\mathbf{P}dv$, где \mathbf{P} вектор поляризации среды или дипольный момент единицы объема. Энергия данного дипольного момента в поле с напряженностью \mathbf{E} , на основании (53) равна $dW = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dv$. Однако энергия диэлектрика в поле не может быть вычислена путем интегрирования этой величины по объему диэлектрика, так как каждый элемент dv диэлектрика является источником электрического поля и в расчет суммарной энергии войдет дважды. Один раз как дипольный момент во внешнем поле, а второй раз как источник поля, в котором находятся другие бесконечно малые диполи. Поэтому вычисление энергии диэлектрического тела в поле, должно основываться на общих принципах.

Диэлектрик во внешнем поле

Рассмотрим бесконечный однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ , в котором имеется конечная система зарядов, создающая поле. Пусть в вакууме данная система зарядов создает поле \mathbf{E}_0 . Полная энергия поля такой системы зарядов в вакууме равна: $W_0 = \int E_0^2 / 8\pi dv$. При наличии

однородной, изотропной среды эта система зарядов создает электрическое поле напряженности \mathbf{E} и индукции $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$. При этом величина вектора \mathbf{E} связана с величиной напряженности поля в вакууме \mathbf{E}_0 равенством: $E = E_0/\epsilon$. Полная энергия поля при наличии диэлектрика равна:

$$W = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} dv = \int \frac{\epsilon E^2}{8\pi} dv.$$

Поэтому энергия диэлектрика, помещенного во внешнее поле \mathbf{E}_0 , есть:

$$W_\epsilon = W - W_0 = \int \left(\frac{\epsilon E^2}{8\pi} - \frac{E_0^2}{8\pi} \right) dv = \int \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \frac{E_0^2}{8\pi} dv = -\frac{\epsilon-1}{8\pi} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0 dv.$$

Так как для однородной, изотропной среды $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ имеет место равенство: $(\epsilon-1)\mathbf{E} = 4\pi\mathbf{P}$, энергия диэлектрика в поле равна:

$$W_\epsilon = -\frac{1}{2} \int \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}_0 dv. \quad (54)$$

Полностью аналогичные рассуждения справедливы и для диэлектрика конечных размеров. Можно показать, что результат в этом случае будет совпадать с (54), где интегрирование проводится по конечному объему диэлектрика.

§9 Силы в электростатическом поле

Сила Лоренца

На точечный заряд, помещенный в электрическое поле с напряженностью \mathbf{E} действует сила (Лоренца) равная $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. При этом определение силы предполагает, что напряженность поля \mathbf{E} создана зарядами, не включающими сам заряд q . На систему N штук точечных зарядов действует суммарная сила равная:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{E}(\mathbf{r}_i).$$

Плотность силы.

Для непрерывно распределенного заряда с плотностью ρ выражение для силы, действующей на данную систему зарядов во внешнем поле имеет вид:

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{E} dv = \int_V \mathbf{f} dv, \quad (55)$$

где \mathbf{f} - сила действующая на единицу объема или плотность силы $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E}$.

Сила действующая на диполь.

Сила действующая на диполь на основании (53) равна:

$$\mathbf{F} = -\text{grad} \left(-\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \right) = (\mathbf{d} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{E}. \quad (56)$$

Энергия диполя зависит как от координат, так и от ориентации диполя по отношению к направлению поля. В связи с этим, на диполь действует не только сила, приводящая к перемещению диполя в пространстве как целого, но еще и момент силы стремящийся развернуть диполь, ориентируя его по направлению поля. Величину момента \mathbf{N} можно вычислить, дифференцируя энергию диполя в поле W_d по углу между направлением диполя и направлением поля.

$$N = \frac{\partial W_d}{\partial \theta} = d E \sin \theta; \quad \mathbf{N} = [\mathbf{d} \times \mathbf{E}].$$

Сила действующая на единицу объема диэлектрика.

Для вычисления силы, действующей на диэлектрик, вектор поляризации которого равен \mathbf{P} , рассмотрим бесконечно малый объем dv . Дипольный момент такого объема равен $\mathbf{P} dv$. В соответствии с (56) бесконечно малая сила, действующая на такой точечный диполь равна $d\mathbf{F} = (\mathbf{P} dv \cdot \vec{\nabla})\mathbf{E}$. В результате сила, действующая на единицу объема диэлектрика \mathbf{f} имеет вид:

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dv} = (\mathbf{P} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{E} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi}(\mathbf{E} \cdot \vec{\nabla})\mathbf{E} = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \text{grad } E^2. \quad (57)$$

Из полученного выражения видно, что направление силы, действующей на диэлектрик не зависит от направления поля. Сила, действующая на элементарный объем диэлектрика, направлена в сторону максимального возрастания напряженности электростатического поля. В однородном поле сила действующая на диэлектрик равна нулю.

Формула (57) оказывается несправедливой, если вектор поляризации диэлектрика зависит нелинейным образом от плотности диэлектрика ρ_m . В этом случае говорят о силе с учетом сжимаемости диэлектрика. Плотность силы в этом случае определяется выражением [10]:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{8\pi} E^2 \text{grad } \epsilon + \frac{1}{8\pi} \text{grad} \left(E^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \right).$$

Сила действующая на проводник

При рассмотрении сил действующих на вещество специального рассмотрения требуют проводники в связи с тем, что поле внутри проводников равно нулю, а весь заряд распределен по поверхности проводника. Очевидно, заряды на поверхности конечного проводника отталкиваются друг от друга пытаясь разорвать проводник, то есть на поверхности возникает сила, связанная с кулоновским отталкиванием зарядов одноименного знака. Вычислим эту силу, основываясь на определении сил в электростатике. У внешней поверхности проводника напряженность поля связана с поверхностной плотностью зарядов σ и на границе раздела проводник - вакуум равна: $\mathbf{E} = 4\pi\sigma\mathbf{n}$, где \mathbf{n} - единичный вектор внешней к проводнику нормали. Выделим на поверхности замкнутого проводника бесконечно малый элемент поверхности ds . Для определения силы, действующей на данный элемент поверхности со стороны зарядов проводника необходимо определить напряженность поля в точке расположения ds , создаваемую всеми зарядами поверхности проводника, за исключением зарядов на самой бесконечно малой поверхности ds . Обозначим эту напряженность поля \mathbf{E}' (рис. 8). Напряженность поля, создаваемую зарядами самого

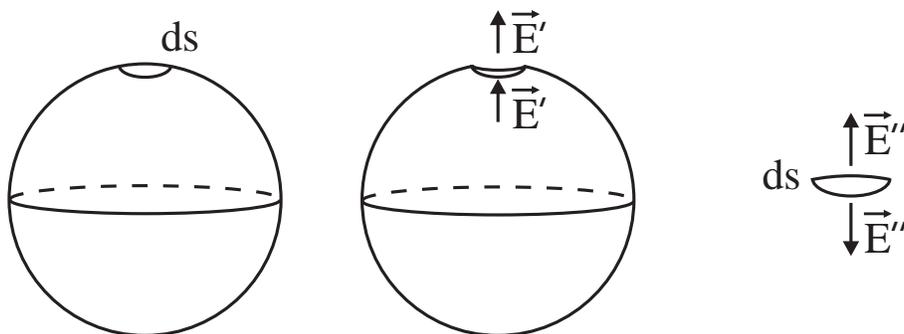


Рис. 8:

элемента поверхности ds , обозначим \mathbf{E}'' . Напряженность поля \mathbf{E}' одинакова по обе стороны площадки ds . В то время как напряженность поля \mathbf{E}'' по разные стороны площадки имеет одинаковое значение, но противоположное направление. Вне проводника поля \mathbf{E}' и \mathbf{E}'' складываются и дают результирующее поле $4\pi\sigma$, то есть $\mathbf{E}' + \mathbf{E}'' = 4\pi\sigma\mathbf{n}$. В то время как внутри проводника эти поля складываются и дают

результатирующее поле равно нулю $\mathbf{E}' + \mathbf{E}'' = 0$. Таким образом $|\mathbf{E}'| = |\mathbf{E}''|$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{E}' = 2\pi\sigma\mathbf{n}$. Следовательно на элемент поверхности ds действует сила равная $\mathbf{F} = dq\mathbf{E}' = \sigma ds 2\pi\sigma\mathbf{n}$.

Давление на поверхности проводника.

Другими словами на единице поверхности проводника возникает давление, равное:

$$\mathbf{p}_n = \frac{d\mathbf{F}}{ds} = 2\pi\sigma^2\mathbf{n} = \frac{E^2}{8\pi}\mathbf{n}. \quad (58)$$

Индекс n в обозначении величины давления на поверхности \mathbf{p}_n устанавливает, что давление относится к единичной площадке, нормаль которой совпадает с вектором \mathbf{n} . При наличии границы проводник диэлектрик выражение (58) имеет тривиальное обобщение и давление в этом случае равно:

$$\mathbf{p}_n = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi}\mathbf{n}.$$

Как видно в обоих случаях численно давление равно величине плотности энергии электростатического поля вблизи поверхности проводника.

§10 Связь объемных и поверхностных сил. Тензор натяжений Максвелла в электростатике

Если на поверхности тела возникает давление \mathbf{p}_n , связанное с проявлением некоторых внешних (или внутренних сил), то величина бесконечно малой силы, действующей на бесконечно малый элемент поверхности ds равна по определению: $d\mathbf{F} = \mathbf{p}_n ds$. Здесь \mathbf{p}_n - вектор давления на площадке, нормаль к которой \mathbf{n} . В общем случае вектор нормали \mathbf{n} не совпадает с направлением вектора \mathbf{p}_n . Вычислив интеграл от \mathbf{p}_n по поверхности тела можно получить суммарную силу, действующую на данное тело. С другой стороны эту же силу можно получить, просуммировав все объемные силы \mathbf{f} , которые действуют на единицу объема тела. В результате для тела, имеющего объем V , ограниченный поверхностью S имеем:

$$\int_V \mathbf{f} dv = \oint_S \mathbf{p}_n ds. \quad (59)$$

Таким образом, объемные и поверхностные силы связаны между собой. Для установления связи этих сил рассмотрим бесконечно малый объем, ограниченный с трех сторон плоскостями декартовой системы координат и с четвертой, плоскостью пересекающей декартовы оси в точках A, B, C (рис. 9).

Тензор натяжений.

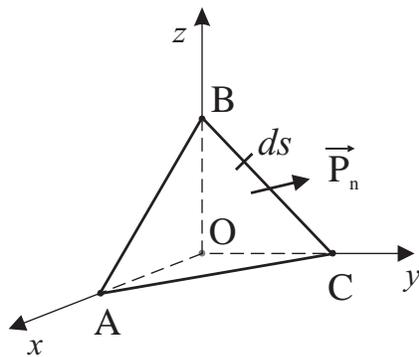


Рис. 9:

Сила на бесконечно малой поверхности $ABC = ds$, в этом случае равна: $\mathbf{p}_n ds$, где \mathbf{p}_n - вектор давления на данной площадке. Соответственно силы на площадках $OCB = ds_x$, $OAC = ds_y$ и $OAB = ds_z$ равны $\mathbf{p}_x ds_x$, $\mathbf{p}_y ds_y$, $\mathbf{p}_z ds_z$. Если выделенный элемент находится в состоянии покоя, то из условия равновесия имеем:

$$\mathbf{p}_n ds = \mathbf{p}_x ds_x + \mathbf{p}_y ds_y + \mathbf{p}_z ds_z \quad (60)$$

По определению для элементов поверхностей выполняются очевидные геометрические соотношения:

$$ds_x = ds \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}), \quad ds_y = ds \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}), \quad ds_z = ds \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}),$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - единичные векторы декартовой системы координат. И так как $\cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}) = n_x$ - проекция вектора нормали \mathbf{n} на ось x , а $\cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) = n_y$ и $\cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}) = n_z$ окончательно находим:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x n_x + \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{p}_z n_z \quad (61)$$

Спроектировав векторное уравнение (61) на декартовы оси получим:

$$\begin{cases} (\mathbf{p}_n)_x = (\mathbf{p}_x)_x n_x + (\mathbf{p}_y)_x n_y + (\mathbf{p}_z)_x n_z \\ (\mathbf{p}_n)_y = (\mathbf{p}_x)_y n_x + (\mathbf{p}_y)_y n_y + (\mathbf{p}_z)_y n_z \\ (\mathbf{p}_n)_z = (\mathbf{p}_x)_z n_x + (\mathbf{p}_y)_z n_y + (\mathbf{p}_z)_z n_z \end{cases}$$

В литературе принято следующее обозначение - $(\mathbf{p}_\alpha)_\beta \equiv p_{\alpha\beta}$, с учетом которого последние равенства записывают в виде:

$$\begin{cases} p_{nx} = p_{xx} n_x + p_{yx} n_y + p_{zx} n_z \\ p_{ny} = p_{xy} n_x + p_{yy} n_y + p_{zy} n_z \\ p_{nz} = p_{xz} n_x + p_{yz} n_y + p_{zz} n_z \end{cases} \quad (62)$$

Следует обратить внимание, что в обозначении $p_{\alpha\beta}$ первый индекс фиксирует направление ортогональное площадке на которой рассматривается давление, а второй индекс фиксирует ось на которую спроектирован вектор давления на данной площадке.

Объемные и поверхностные силы.

Рассмотрим для примера проекцию на ось x суммарной силы, действующей на конечный объем V , ограниченный поверхностью S :

$$F_x = \oint_S p_{nx} ds = \oint_S (p_{xx} n_x + p_{yx} n_y + p_{zx} n_z) ds = \oint_S \sum_{i=1}^3 p_{ix} n_i ds.$$

В соответствии с теоремой Остроградского - Гаусса последнее равенство можно переписать в виде:

$$F_x = \int_V \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) dv = \int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ix}}{\partial x_i} dv.$$

При использовании понятия силы действующей на единицу объема \mathbf{f} , для проекции силы на ось x имеем: $F_x = \int f_x dv$, поэтому очевидно, имеет место равенство:

$$f_x = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ix}}{\partial x_i}$$

Или в общем случае

$$f_k = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_i}; \quad k \in 1, 2, 3. \quad (63)$$

Инвариантные, независящие от геометрии выделенного объема, девять коэффициентов p_{ik} , $i, k \in 1, 2, 3$ в формуле (62) образуют объект, который в механике сплошных сред принято называть тензором натяжений. В случае, если силы имеют электромагнитное происхождение такой тензор называется тензором натяжений Максвелла. Обычно тензор натяжений Максвелла обозначается буквой M , $M_{ik} \equiv p_{ik}$. При этом формула для вычисления проекции силы на декартову ось k , через тензор натяжений Максвелла, записывается в виде:

$$F_k = \oint_S \sum_{i=1}^3 M_{ik} n_i ds; \quad k \in 1, 2, 3. \quad (64)$$

Тензор натяжений Максвелла.

Найдем явный вид тензора натяжений Максвелла в случае электростатического поля в вакууме. Сила, действующая на единицу объема в этом случае равна: $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E}$, где ρ -объемная плотность заряда, а \mathbf{E} -вектор напряженности электростатического поля. С учетом закона Кулона это выражение можно представить

в виде, содержащем только переменные поля: $\mathbf{f} = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E} / 4\pi$. Отсюда для проекции силы на ось x , действующей на единицу объема:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4\pi} E_x (\vec{\nabla} \cdot \mathbf{E}) = \frac{1}{4\pi} \left[\operatorname{div} (E_x \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} E_x) \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} E_x^2 + \frac{\partial}{\partial x} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial x} (E_x E_z) - E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} - E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

В силу уравнения электростатического поля $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, частные производные от компонент полей удовлетворяют соотношению $\partial E_i / \partial x_k = \partial E_k / \partial x_i$, $i, k \in 1, 2, 3$. Следовательно последнее равенство можно переписать тождественно:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \right] = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{zx}}{\partial z} \end{aligned}$$

Отсюда для элементов тензора натяжений Максвелла получим:

$$M_{xx} = \frac{1}{4\pi} \left(E_x^2 - \frac{E^2}{2} \right); \quad M_{yx} = \frac{1}{4\pi} E_y E_x; \quad M_{zx} = \frac{1}{4\pi} E_z E_x.$$

Повторяя аналогичные вычисления для проекций силы на ось y и z , получим явный вид тензора натяжений Максвелла в случае электростатического поля в вакууме:

$$M_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} \right]; \quad i, k \in 1, 2, 3. \quad (65)$$

Нетрудно убедиться, что в случае однородной изотропной среды тензор натяжений имеет вид:

$$M_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[E_i D_k - \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \delta_{ik} \right]; \quad i, k \in 1, 2, 3. \quad (66)$$

§ 11 Молекулярная теория диэлектриков

Идеальными диэлектриками являются вещества в которых под действием электрического поля не возникает переноса зарядов или не возникает электрического тока. Диэлектрики состоят из атомов и молекул. Так как в состав атомов входят заряженные частицы, то внешнее поле влияя на них вызывает появление дипольного момента вещества или поляризации вещества. Диэлектрики условно можно разделить на две группы. Полярные и неполярные.

Полярные диэлектрики.

Полярные диэлектрики – это диэлектрики, атомы или молекулы которых имеют отличный от нуля дипольный момент, т.е. $\mathbf{p} \neq 0$. Например такие газы как N_2 , H_2 , CO_2 , CH_4 являются полярными диэлектриками.

Неполярные диэлектрики.

Неполярные диэлектрики, это диэлектрики атомы или молекулы которых имеют равный нулю дипольный момент при отсутствии внешнего электрического поля. Среди этих диэлектриков можно назвать, например, такие газы как SO_2 , H_2S , NH_3 .

Под действием внешнего поля в неполярных молекулах наводится дипольный момент в направлении поля, т.е. молекулы поляризуются. Под действием внешнего электрического поля дипольные моменты атомов или молекул полярных диэлектриков стремятся сориентироваться по направлению внешнего поля и частично поляризуются.

§11.1 Поляризация неполярных диэлектриков.

В неполярных диэлектриках происходит смещение центров тяжести положительных и отрицательных зарядов, входящих в состав молекулы, так как со стороны внешнего поля силы действующие на заряды ядер и заряды электронных оболочек противоположно направлены.

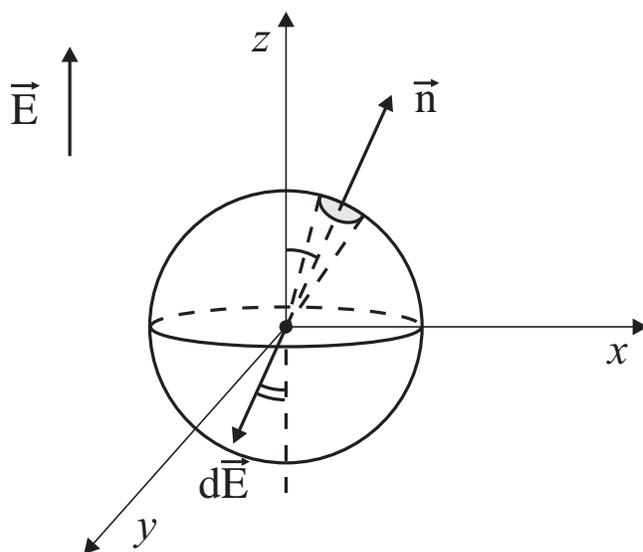


Рис. 10:

При этом наведенный дипольный момент пропорционален средней (созданной как внешним полем, так и зарядами атомов) напряженности поля $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}'$. Так как дипольные моменты всех поляризованных молекул направлены в одном направлении - направлении внешнего поля, то суммарный дипольный момент единицы объема равен векторной сумме всех дипольных моментов атомов в единице объема. Если обозначить число атомов в единице объема через N , то вектор поляризации диэлектрика в этом случае равен $\mathbf{P} = N\mathbf{p}$.

При вычислении вектора поляризации неполярных диэлектриков необходимо учесть, что поле, приводящее к смещению зарядов молекулы в противоположные стороны создается внешним полем напряженности \mathbf{E} и зарядами всех молекул, кроме зарядов входящих в состав рассматриваемой молекулы.

Это условие возникает в связи с определением силы Лоренца.

Для определения величины этого поля, действующего на одну молекулу выделим вокруг произвольной молекулы сферу радиуса r . Обозначим область внутри сферы через 1, а область вне сферы через 2. В соответствии с принципом суперпозиции, поле действующее на выделенную молекулу представим в виде суммы трех слагаемых $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1$. Где \mathbf{E} - напряженность внешнего поля, вызывающего процесс поляризации. $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ - напряженности полей, создаваемые зарядами молекулы из первой и второй областей соответственно, в точке расположения выделенной молекулы.

Для вычисления \mathbf{E}_2 воспользуемся принципом суперпозиции и связью вектора поляризации с объемной плотностью связанных (входящих в состав молекулы) зарядов $\rho_{in} = -\text{div } \mathbf{P}$. Удалим мысленно вещество из области внутри сферы радиуса r . В соответствии с определением объемной плотности связанных зарядов на границе разреза имеет место поверхностное уравнение вида: $\text{Div } \mathbf{P} = -\sigma$. Здесь σ - поверхностная плотность заряда на сфере радиуса r . Данное поверхностное уравнение означает выполнение следующих равенств (рис. 10):

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma \quad \rightarrow \quad P_{2n} = -\sigma, \quad \sigma = -P \cos \theta,$$

так как в 1-ой области вещество отсутствует и, следовательно, $P_{1n} = 0$

Рассмотрим бесконечно малый элемент поверхности ds на сфере радиуса r . Данный элемент поверхности несет бесконечно малый заряд величины $dq = \sigma ds = \sigma r^2 d\Omega$ и создает в центре сферы (в точке расположения молекулы) напряженность поля, величина которого равна $dE = dq/r^2$. Если внешнее поле направить по оси z , то из условия осевой симметрии результирующее поле от зарядов на поверхности может быть направлено только по оси z

$$E_z = \int_{V_2} dE_z = \int_{V_2} \left(-\frac{dq}{r^2} \right) \cos \theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(-\frac{P \cos \theta r^2 d\Omega}{r^2} \right) \cos \theta = \frac{4\pi}{3} P.$$

Таким образом $\mathbf{E}_2 = 4\pi\mathbf{P}/3$.

В однородном изотропном диэлектрике в силу сферической симметрии выделенной шаровой области $\mathbf{E}_1 = 0$. В результате:

$$\mathbf{P} = N\mathbf{p} = N\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \right) \quad \rightarrow \quad \mathbf{P} = \frac{\alpha N}{1 - \frac{4\pi}{3}\alpha N} \mathbf{E}.$$

Так как $\mathbf{P} = \chi\mathbf{E}$ получаем $\chi = \alpha N / (1 - 4\pi\alpha N/3)$. С другой стороны $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E}$, или $\chi = (\epsilon - 1)/4\pi$. На основании этих рассуждений получим связь между поляризуемостью отдельного атома α и диэлектрической проницаемостью среды ϵ в целом:

$$\frac{\epsilon - 1}{4\pi} = \frac{\alpha N}{1 - \frac{4\pi}{3}\alpha N} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{4\pi N} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{3}{4\pi N} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2},$$

здесь $n = \sqrt{\epsilon}$ - показатель преломления среды. Важной особенностью данного соотношения является возможность определения микроскопического (атомного) параметра α на основе измерения макроскопического параметра ϵ

§11.2 Поляризация полярных диэлектриков.

Для полярных диэлектриков под действием внешнего поля происходит два процесса. С одной стороны атомы полярных диэлектриков поляризуются под действием поля. То есть кроме собственного дипольного момента в этих атомах появляется дополнительный, наведенный дипольный момент. Однако величина этого наведенного дипольного момента в слабом электрическом поле ($E \ll E$) настолько мала в сравнении с величиной собственного дипольного момента, что им можно полностью пренебречь и не учитывать при дальнейших рассуждениях. С другой стороны внешнее поле стремится повернуть собственный дипольный момент атома по направлению поля. В результате все собственные дипольные моменты атомов выстроились бы по направлению поля, однако этому препятствует тепловое движение атомов. Сталкиваясь друг с другом, в результате теплового движения, атомы передают друг другу некоторую величину кинетической энергии, которая приводит в том числе и к процессу разориентации дипольных моментов молекул по отношению к выделенному направлению. Таким образом проявляются два противоположно направленных, конкурирующих процесса - процесс ориентации дипольных моментов атомов под действием поля и процесс разориентации в результате столкновений атомов. При фиксированной температуре среды между этими процессами устанавливается определенное динамическое равновесие, приводящее к некоторому среднему значению вектора поляризации среды \mathbf{P} .

Для вычисления среднего значения вектора \mathbf{P} рассмотрим случай когда внешнее поле отсутствует. Выберем единичный объем ограниченный сферической поверхностью. Все направления в такой системе равноправны. Поэтому число атомов dn_0 , дипольные моменты которых лежат внутри бесконечно малого телесного угла $d\Omega$, с центром в начале координат пропорционально величине этого телесного угла $dn_0 = \text{const } d\Omega$. Интеграл от dn_0 по выбранному единичному объему дает число атомов в единице объема N . Таким образом нормированная на число атомов в единице объема функция распределения атомов по направлениям дипольного момента есть:

$$dn_0 = \frac{N}{4\pi} d\Omega.$$

В соответствии с известной теоремой Больцмана во внешнем поле \mathbf{E} данная функция распределения модифицируется в соответствии с равенством:

$$dn(E) \approx \text{const} \exp\left(-\frac{U(E)}{kT}\right) dn_0, \quad (67)$$

где $U(E) = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})$ - энергия диполя во внешнем поле, k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура вещества. Нормировка выражения (67) на число атомов в единице объема приводит к следующей функции распределения:

$$dn(E) = C e^{a \cos \theta} d\Omega; \quad C \equiv \frac{N}{2\pi} \frac{a}{\exp(a) - \exp(-a)}, \quad a \equiv \frac{pE}{kT}. \quad (68)$$

Суммарный бесконечно малый дипольный момент молекул дипольные моменты которых направлены внутри бесконечно малого телесного угла равен $d\mathbf{p} = \mathbf{p} dn(E)$. Интегрирование дипольного момента по всем направлениям приводит к суммарному значению вектора поляризации, который может быть направлен только по линии внешнего поля, так как другого выделено направления в системе нет. Таким образом достаточно вычислить только z составляющую вектора поляризации среды если внешнее поле направлено по оси z . P_x и P_y очевидно равны нулю.

$$P_z = \int p \cos \theta dn(E) = Np \left[\text{ctha} - \frac{1}{a} \right] \equiv Np L(a).$$

Введенная в данном равенстве функция $L(x)$ называется функцией Ланжевена. График $L(x)$ приведен на рис. 11.

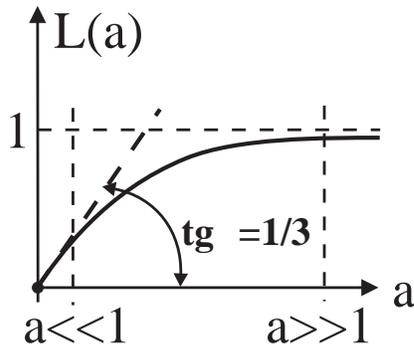


Рис. 11:

Рассмотрим два частных случая $a \gg 1$ и $a \ll 1$. По смыслу эти условия соответствуют сильному $a \gg 1$ и слабому $a \ll 1$ полю. Под слабым здесь понимается такое поле, энергия взаимодействия которого с дипольным моментом молекулы много меньше энергии ее теплового движения. Сильное поле в этом рассмотрении, соответствует условию, когда энергия взаимодействия дипольного момента атома с электрическим полем много больше энергии теплового движения.

Выполним оценку величин полей для которых справедливо приближение слабого поля. Если принять, что характерные размеры атома и молекулы $a_0 \approx 0.5 \times 10^{-8}$, то величина дипольного момента молекулы имеет порядок величины: $p \approx e a_0 \approx 4.8 \times 10^{-10} \cdot 0.5 \times 10^{-8} \approx 2.4 \times 10^{-18}$ ед. СГСЕ. Постоянная Больцмана $k \approx 10^{-16}$. Если внешнее поле составляет $E \approx 10^{-5} E_0$, где

$E_0 \approx 10^{-9}$ - напряженность внутриатомного поля, то $pE \approx 10^{-16}$ эрг. Соответственно при температуре $T \approx 300^\circ$ параметр $kT \approx 10^{-14}$ эрг. Таким образом, для полей создаваемых источниками не лазерного типа условие слабости поля выполняется всегда.

В случае слабого поля, так как $\text{cth}(x) \approx x^{-1} + x/3 + x^3/45 + \dots$, находим:

$$\mathbf{P} = Np \frac{pE}{3kT} \frac{\mathbf{E}}{E} = \chi \mathbf{E}; \quad \chi \equiv \frac{Np^2}{3kT}; \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\chi = 1 + 4\pi \frac{Np^2}{3kT}.$$

Как видно из представленного результата диэлектрическая проницаемость вещества является в этом случае функцией от температуры вещества, а вектор поляризации пропорционален \mathbf{E} .

В случае сильного поля $L(\infty) \rightarrow 1$, а вектор поляризации равен:

$$\mathbf{P} = Np \frac{\mathbf{E}}{E}.$$

В этом случае дипольные моменты всех молекул ориентированы в одном направлении по полю и нельзя ввести понятие восприимчивости вещества χ , как константы, характеризующей свойства вещества. В этом случае восприимчивость вещества χ не может быть определена, как характеристика собственно вещества, а является нелинейной функцией, зависящей от напряженности поля $\chi \rightarrow Np/E$.

Литература

- [1] *С.Р.де Гроот, Л.Г.Сатторп.* Электродинамика. М., Наука, 1982.
- [2] *А.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов.* Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М., Наука, 1978.
- [3] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Гидродинамика. М., Наука, 1986.
- [4] *В.Г.Левич.* Курс теоретической физики. Том 1 М., Наука, 1969.
- [5] *В. Карцев.* Приключения великих уравнений. М., Знание, 1986, 288 с.
- [6] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. т.6. М., Мир, 1966, 343с.
- [7] *Джексон.* Классическая электродинамика.
- [8] *Градитейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.
- [9] *Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский.* Квантовая теория волнового момента. Ленинград, Наука, 1975.
- [10] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.
- [11] *М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин.* Классическая электродинамика. М., Наука, 1988.

Оглавление

§1	Основные уравнения электростатики.	1
§2	Граничные условия	2
§3	Поле произвольной системы зарядов.	4
§4	Поле системы зарядов на больших расстояниях	7
§5	Электростатика проводников	9
§6	Метод изображений	12
§7	Энергия электростатического поля	13
§8	Энергия системы зарядов во внешнем поле	15
§9	Силы в электростатическом поле	17
§10	Связь объемных и поверхностных сил. Тензор натяжений Максвелла в электростатике	19
§11	Молекулярная теория диэлектриков	21
§11.1	Поляризация неполярных диэлектриков.	22
§11.2	Поляризация полярных диэлектриков.	23