

## §1 Элементарные определения физики плазмы

Плазмой называется состояние вещества при котором в веществе присутствуют свободные электроны, положительно заряженные атомы или ионы и нейтральные атомы или молекулы.

В простейшем случае плазму можно представить как ионизованный газ. В зависимости от степени ионизации атомов условно плазму делят на холодную и горячую. Холодная плазма – это состояние ионизованного газа при котором число положительно заряженных ионов незначительно. Очевидно, что для отрыва большого числа электронов от многоэлектронного атома требуется приложить большое количество энергии. В этом смысле сильно ионизованную плазму можно называть горячей.

Плазма – наиболее распространенное состояние вещества в природе. Звезды – это гигантские области горячей, то есть сильно ионизованной плазмы. Внешняя поверхность земной атмосферы окружена плазменной оболочкой, которая называется ионосферой. Плазма возникает при любых типах газовых разрядов (молния, искра, электрическая дуга и т.п.).

Электрические силы, связывая разноименные заряды в плазме обеспечивают квазинейтральность плазмы. Разделение положительных и отрицательных зарядов в объеме плазмы приводит к возникновению электрических полей, стремящихся восстановить равновесное распределение зарядов. Для того, чтобы оценить напряженность поля, которая может возникать при нарушении нейтральности плазмы, предположим, что в некотором объеме имеющем характерные линейные размеры  $x$ , произошло полное разделение положительных и отрицательных зарядов. Электрическое поле в данной области удовлетворяет уравнению:  $\operatorname{div} \mathbf{E} \approx E/x = 4\pi\rho = 4\pi n e$ . Здесь  $n$  число электронов в единице объема,  $e$  – заряд электрона. Таким образом величина поля, возникающего в пространстве при разделении зарядов в области с размерами  $x$  имеет следующий порядок величины:

$$E \approx 4\pi n e x. \quad (1)$$

Потенциал плазмы в области разделения зарядов по порядку величины будет равен:

$$\varphi \approx E x = 4\pi n e x^2. \quad (2)$$

### Пример.

В качестве примера рассмотрим полностью ионизованную водородную плазму, находившуюся первоначально при нормальной температуре и давлении  $\approx 1$  мм. рт. ст. Число электронов и ионов в кубическом сантиметре такой плазмы  $n \approx 10^{17}$ . Поэтому на основании (1) в объеме с диаметром порядка одного миллиметра возникнет напряженность поля порядка  $10^{10}$  в/см или разность потенциалов (2) порядка  $10^9$  вольт.

Ясно, что такое распределение зарядов в плазме не реально, так как оно будет скомпенсировано движением зарядов противоположных знаков так что произойдет компенсация нарушения квазинейтральности. Однако в очень малых областях в силу теплового движения заряженных частиц нарушение квазинейтральности может происходить и происходит.

### Дебаевский радиус экранирования.

При заданной концентрации зарядов и температуры плазмы существует характерный линейный размер  $\delta$ , определяющий размеры области неоднородности распределения зарядов в плазме. Этот размер можно определить из равенства энергии заряда в поле и его тепловой энергии  $e\varphi \approx kT$ . Здесь  $k \approx 10^{-16}$  эрг/град – постоянная Больцмана, а  $T$  – абсолютная температура:

$$4\pi n e \delta^2 \approx kT \quad \rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}}. \quad (3)$$

Такую же характерную величину можно получить рассматривая вопрос об экранировании электрического поля в плазме. Пусть в плазму внесен точечный заряд  $q$ . Тогда одноименные с  $q$  заряды немного отойдут от

пробного заряда, а разноименные с  $q$  приблизятся. В результате проявится эффект экранировки поля заряда  $q$ , который может быть оценен исходя из решения уравнения:

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi\rho = -4\pi e(n_+ - n_-). \quad (4)$$

Здесь  $n_+$  и  $n_-$  - число ионов и электронов в единице объема плазмы, соответственно. В условиях статистического равновесия пространственное распределение частиц определяется распределением Больцмана:

$$n_+ = n \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right); \quad n_- = n \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right).$$

Рассматривая область не слишком близко к пробному заряду, в которой  $e\varphi \ll kT$  для плотности заряда можно получить приближенное выражение:

$$\rho = e \left[ n \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right) - n \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \right] \approx ne \left( 1 - \frac{e\varphi}{kT} - 1 - \frac{e\varphi}{kT} \right) = -2\frac{ne^2}{kT} \varphi.$$

Таким образом в случае сферической симметрии уравнение (4) принимает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\varphi) = \frac{1}{\delta'^2} \varphi; \quad \frac{1}{\delta'^2} \equiv 8\pi \frac{ne^2}{kT} \quad (5)$$

Решение уравнения (5) можно представить в виде:

$$r\varphi = A \exp\left(-\frac{r}{\delta'}\right) + B \exp\left(\frac{r}{\delta'}\right). \quad (6)$$

Из физических условий  $B \equiv 0$ , так как при  $r \rightarrow \infty$  потенциал  $\varphi \rightarrow 0$ . При  $r \rightarrow 0$ , то есть вблизи пробного заряда потенциал должен совпадать с потенциалом точечного заряда  $q$ . В результате  $A = q$ . Окончательно получим:

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\delta'}\right). \quad (7)$$

Как видно постоянная  $\delta'$  на множитель  $\sqrt{2}$  отличается от величины  $\delta$  (3). Однако если допустить, что экранировка осуществляется только более подвижными электронами, то в выражении для  $\rho$  останется только одна компонента, а константа  $\delta'$  окажется совпадающей с константой  $\delta$  [2] и формула для потенциала запишется в виде:

$$\varphi = \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\delta}\right). \quad \delta \equiv \sqrt{kT} 4\pi n e^2 \quad (8)$$

Параметр  $\delta$  в физике плазмы называется дебаевским радиусом экранирования и характеризует размер области в которой проявляется отклонения плазмы от квазинейтральности. Используя понятие о дебаевском радиусе основоположником учения о плазме Ленгмюром было предложено определение плазмы как особого состояния вещества содержащего разноименно заряженные частицы в котором дебаевская длина мала по сравнению с размерами занимаемыми самой плазмой.

### Плазменная частота.

Очевидно, что заряды плазмы одновременно входят в состав экранирующего объема и сами являются пробными зарядами. Это означает, что области неоднородности плазмы постоянно возникают и разрушаются по объему плазмы. Время, в течении которого области неоднородности существуют, можно оценить, разделив  $\delta$  на скорость движения более быстрых электронов:

$$\tau = \frac{\delta}{v} = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}} \sqrt{\frac{m}{kT}} = \sqrt{\frac{m}{4\pi n e^2}}. \quad (9)$$

Здесь учтено, что скорость движения электрона массы  $m$  можно оценить на основании соотношения  $mv^2 \approx kT$ . Величина, обратная  $\tau$ , называется **плазменной** или **ленгмюровской частотой**:

$$\frac{1}{\tau} \equiv \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{kT}} \quad (10)$$

### Высокочастотное поле в плазме.

Своеобразие свойств плазмы проявляется существенно под действием высокочастотного электрического поля. Рассмотрим в качестве примера простейший случай. Пусть в плазме имеется переменное электрическое поле с напряженностью  $E = E_0 \exp(i\omega t)$ . Комплексная форма используется только для упрощения промежуточных вычислений. Если частота поля столь велика, что за время  $t \approx 1/\omega$  вероятность столкновения электрона с ионами ничтожно мала, то можно рассматривать движение электрона пренебрегая столкновениями. Уравнение движения в этом случае имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_0 \exp(i\omega t).$$

Интегрируя данное уравнение, получим для  $x$ :

$$x = \frac{e}{m\omega^2} E_0 \exp(i\omega t).$$

Как следует из последнего выражения, смещение электрона  $x$  сдвинуто по фазе относительно действующей силы  $(-eE)$  на  $180^\circ$ . Это означает, что вектор поляризации  $\mathbf{P}$  направлен против поля и, следовательно, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  меньше единицы. По определению

$$\epsilon = 1 + 4\pi \frac{P}{E}; \quad P = -n e x.$$

В результате с учетом соотношения (10) находим для диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

Отсюда следует, например, что при  $\omega < \omega_0$  диэлектрическая проницаемость отрицательна, а следовательно, электромагнитные волны с частотами меньшими  $\omega_0$  не проникают в плазму и полностью отражаются от ее поверхности.

## §2 Магнитная изоляция плазмы и пинч-эффект

Для описания движения плазмы можно использовать уравнения гидродинамики [3]. Если пренебречь вязкостью плазмы, уравнение движения примет вид:

$$\delta \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \text{grad } p.$$

Здесь  $\mathbf{f}$  - сила действующая на единицу объема плазмы,  $\delta$  - плотность, а  $p$  - давление газа плазмы.

Если в плазме протекает ток, плотность которого  $\mathbf{j}$ , то сила, действующая на единицу объема, определяется выражением  $\mathbf{f} = \mu[\mathbf{j} \times \mathbf{H}]/c$ . Таким образом, уравнение движения плазмы имеет вид в этом случае:

$$\delta \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p + \frac{\mu}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]. \quad (11)$$

### Неподвижная плазма.

В частном случае неподвижной плазмы  $\mathbf{v} = 0$  из уравнения (11) следует уравнение гидростатики:

$$\text{grad } p = \frac{\mu}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}]. \quad (12)$$

Исключая из последнего уравнения плотность тока на основании системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении находим:

$$\text{grad } p = \frac{\mu}{4\pi} [\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}]. \quad (13)$$

Учитывая векторное равенство:

$$[\text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{H}] = (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} - \text{grad } \frac{H^2}{2},$$

уравнение (13) примет вид:

$$\text{grad } p = \frac{\mu}{4\pi} \text{grad } \frac{H^2}{2} + \frac{\mu}{4\pi} (\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H}. \quad (14)$$

Для упрощения последнего выражения выберем направление поля вдоль оси  $x$  и рассмотрим частный случай  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(y, z)$ . В этом случае  $(\mathbf{H} \cdot \nabla) \mathbf{H} = 0$  и формула (14) приводит к результату:

$$p + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}{8\pi} = \text{const}. \quad (15)$$

Выражение (15) показывает, что полное давление в плазме складывается из магнитного давления  $\mu H^2/8\pi$  и газового давления, сумма которых остается в плазме постоянной величиной. Соотношение (15) показывает, что в области пространства не заполненном плазмой, значение  $\mathbf{H}$  больше, чем во внутренней области, заполненной плазмой. Это означает, что плазма не может расширяться в пустоту. Магнитное поле изолирует плазму, заменяя собой непроницаемую стенку.

### Пинч-эффект.

Еще одно важное гидростатическое явление в плазме - это явление самосжатия плазменного шнура собственным магнитным полем тока. Данное явление называется пинч-эффект.

Пусть плазма представляет из себя цилиндр радиуса  $R$ , ось которого совпадает с осью  $z$ , по которому протекает ток с плотностью  $\mathbf{j}$ . Магнитное поле тока создает магнитное давление, которое уравновешивается давлением в плазме. Пусть, для примера, плотность тока постоянна по сечению цилиндра плазмы. Тогда в цилиндрических координатах уравнение (12) примет вид:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{c} j H_\varphi.$$

Интегрирование последнего уравнения приводит к результату:

$$p = p_0 - \frac{1}{c^2} \pi j^2 r^2; \quad r < R, \quad (16)$$

$$p = 0; \quad r > R. \quad (17)$$

Здесь  $p_0 = n_0 k T$  -давление и  $n_0$  -плотность газа в центре плазменного цилиндрического шнура.

Формулы (16), (17) показывают, что газовое давление и плотность выше в центре, чем на периферии цилиндра. Собственное магнитное поле сжимает и удерживает плазменный цилиндрический шнур. При этом радиус плазменного шнура постоянен, а выделяющееся джоулево тепло разогревает плазму.

Явление самосжатия плазменного цилиндра, получившее название пинч-эффект, приводит к отрыву плазмы от стенок сосуда и формирует более тонкий плазменный шнур [4].

## §3 Электродинамика сверхпроводников

Явление сверхпроводимости было открыто Оннесом в 1911 году при наблюдении изменения зависимости сопротивления  $R$  ртути от температуры. Было обнаружено, что при температуре  $T \approx 4^\circ\text{K}$  сопротивление ртути стало приблизительно на 16 порядков меньше, чем у чистой меди. Другими словами  $R(\text{ртути}) \rightarrow 0$  рис 1. Дальнейшие экспериментальные исследования показали что:

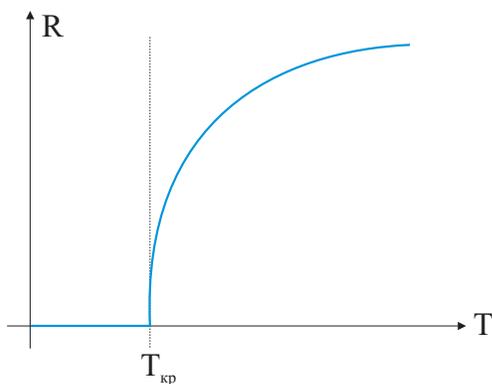


Рис. 1:

квантование магнитного потока. Данное экспериментальное наблюдение было установлено следующим образом. Пусть при  $T > T_c$  замкнутое кольцо из проводника помещено в магнитное поле. Силовые линии магнитного поля пересекают плоскость кольца и дают определенное значение потока вектора индукции. Понижим температуру до  $T_c$  и выключим магнитное поле. При выключении поля поток вектора индукции магнитного поля начнет уменьшаться, но его изменение индуцирует в проводящем кольце ток, который не затухает с течением времени, а в кольцо "вмораживается" магнитный поток. Такой ток называется *сверхтоком*. Сверхток наблюдался в течении двух с половиной лет, но никаких изменений в его величине не было обнаружено. Экспериментально было установлено, что вмороженный магнитный поток кратен величине:

$$\Phi_0 = \pi \frac{\hbar c}{e},$$

где  $\hbar$  – постоянная Планка  $\approx 10^{-27}$  эрг·сек,  $c$  – скорость света,  $e$  – величина заряда электрона. Кратность вмороженного потока определенной величине указывает на квантовый характер явления сверхпроводимости.

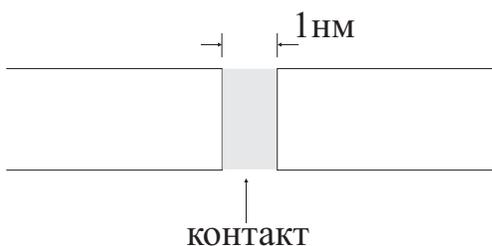


Рис. 2:

3) На сверхпроводящем контакте проводников наблюдается эффект Джозефсона, предсказанный теоретически в 1962 году. Суть эффекта состоит в том, что при протекании тока через контакт двух проводников (см. рис 2) при значении тока  $I > I_c$  на контакте появляется осциллирующая разность потенциалов с частотой  $\hbar\omega = 2eV$  и возникает генерация "монохроматического", когерентного электромагнитного излучения с мощностью  $\approx 10^{-12}$  вт на частоте  $\nu \approx 10^4 - 10^5$  МГц при облучении контакта СВЧ излучением. Соответственно на вольт-амперной характеристики появляются скачки.

4) Происходит выталкивание  $\mathbf{B}$  из сверхпроводника. Данное явление получило название эффект Мейснера-Оксенфельда. Таким образом определение идеального сверхпроводника удовлетворяет условиям  $\mathbf{B} = 0, \rho = 0$ .

### Модель Лондонов.

Классическая теория явлений сверхпроводимости первоначально была построена на использовании модели и уравнений Лондонов. В рамках этой модели все электроны делятся на два типа – сверхпроводящие и нормальные. Физическая природа двух типов электронов в модели не обсуждается. Полное число электронов в единице объема  $n$  определяется суммой числа сверхпроводящих  $n_s$  и нормальных  $n_n$  электронов  $n = n_s + n_n$ . Изменение числа нормальных и сверхпроводящих электронов в объеме проводника в зависимости от температуры проводника показан на рис 3.

Рассмотрим бесконечно малый объем сверхпроводника  $dv$ . Масса сверхпроводящих электронов внутри этого бесконечно малого объема равна  $n_s m dv$ , а заряд  $n_s e dv$ . В результате уравнение движения (Ньютона)

для сверхпроводящих электронов внутри объема  $dv$  под действием напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  имеет вид:

$$n_s m dv \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = n_s e dv \mathbf{E}.$$

Умножая полученное равенство на заряд электрона и учитывая, что плотность тока  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = n e \mathbf{v}$ , перепишем последнее равенство в виде:

$$\frac{d\mathbf{j}_s}{dt} = \frac{n_s e^2}{m} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} = \frac{d}{dt} (\Lambda \mathbf{j}_s), \quad \Lambda \equiv \frac{m}{n_s e^2}. \quad (19)$$

В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея, на основании (19) получим:

$$\text{rot} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Lambda \mathbf{j}_s \right) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

Проинтегрировав данное уравнение по времени находим:

$$\Lambda \text{rot} \mathbf{j}_s + \frac{1}{c} \mathbf{B} = \Lambda \text{rot} \mathbf{j}_s + \frac{1}{c} \text{rot} \mathbf{A} = 0.$$

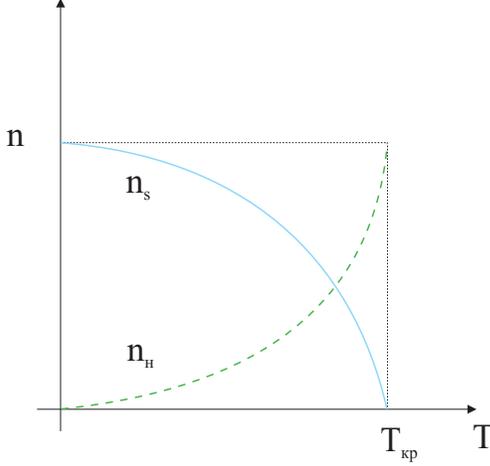


Рис. 3:

Выразим в последнем уравнении плотность сверхпроводящего тока из обобщенного закона Ампера, в котором опущено слагаемое, соответствующее току смещения. В результате:

$$\text{rot} \text{rot} \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = -\frac{4\pi}{c^2 \Lambda} \mathbf{B}.$$

Выполняя тождественные преобразования получаем уравнение для  $\mathbf{B}$ :

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{B}; \quad \lambda^2 \equiv \frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}. \quad (20)$$

Решение данного уравнения есть:

$$\mathbf{B}(z) = \mathbf{B}(0) \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right).$$

Параметр  $\lambda$

$$\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s e^2}}$$

называется лондоновской глубиной проникновения магнитного поля. Нетрудно оценить величину глубины проникновения. При  $n_s \approx 10^{22} \text{см}^{-3}$   $\lambda \approx 10^{-5} \text{см}$ .

Так как  $\lambda$  есть функция от числа сверхпроводящих электронов, то  $\lambda$  зависит от температуры. Эмпирически установлено, что:

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{1 - (T/T_s)^4}.$$

### Квантование магнитного потока.

Квантование магнитного потока может быть качественно объяснено на основе соотношения, известного из квантовой теории:

$$\oint_L \mathbf{p}_s \cdot d\mathbf{l} = n\hbar, \quad n \in 1, 2, 3, \dots$$

Подставляя значение обобщенного импульса  $\mathbf{p}_s = m\mathbf{v}_s - \frac{e}{c} \mathbf{A}$ , с учетом равенства  $\mathbf{v}_s = \mathbf{j}_s/n_s e$  получим:

$$\oint_L \left[ \frac{m}{n_s e} \mathbf{j}_s + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right] \cdot d\mathbf{l} = n\hbar, \quad n \in 1, 2, 3, \dots$$

Первый интеграл равен нулю в силу замкнутости тока, в результате:

$$\frac{e}{c} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{e}{c} \int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \frac{e}{c} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{e}{c} \Phi = n\hbar.$$

# Литература

- [1] *С.Р.де Гроот, Л.Г.Сатторп.* Электродинамика. М., Наука, 1982.
- [2] *А.А.Арцимович, С.Ю.Лукьянов.* Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. М., Наука, 1978.
- [3] *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц.* Гидродинамика. М., Наука, 1986.
- [4] *В.Г.Левич.* Курс теоретической физики. Том 1 М., Наука, 1969.
- [5] *В. Карцев.* Приключения великих уравнений. М., Знание, 1986, 288 с.
- [6] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике. Электродинамика. т.6. М., Мир, 1966, 343с.
- [7] *Джексон.* Классическая электродинамика.
- [8] *Градитейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971, 1108 с.
- [9] *Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский.* Квантовая теория волнового момента. Ленинград, Наука, 1975.
- [10] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М., Наука, 1976.
- [11] *М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин.* Классическая электродинамика. М., Наука, 1988.

# Оглавление

§1	Элементарные определения физики плазмы . . . . .	1
§2	Магнитная изоляция плазмы и пинч-эффект . . . . .	3
§3	Электродинамика сверхпроводников . . . . .	4